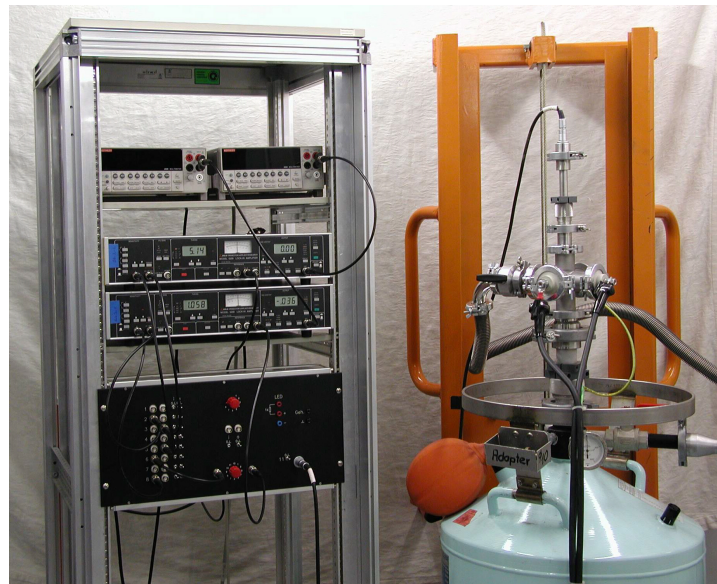


UNIVERSITÄT REGENSBURG

# F-Praktikum

VERSUCH:  
DER QUANTEN-HALL-EFFEKT



01.02.2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt</b>	<b>4</b>
2.1. Das zweidimensionale Elektronengas . . . . .	5
2.1.1. Herstellung . . . . .	5
2.2. Quantenmechanische Betrachtung . . . . .	6
2.3. Der klassische Hall-Effekt . . . . .	8
2.3.1. Theorie . . . . .	8
2.3.2. Das Experiment . . . . .	9
2.4. Der Quanten-Hall-Effekt und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen . . . . .	11
2.4.1. Das 2DEG im Magnetfeld . . . . .	12
2.4.2. Das Randkanalmodell . . . . .	15
2.4.3. Der Landauer-Büttiker-Formalismus . . . . .	17
2.4.4. Erklärung des Quanten-Hall-Effekts . . . . .	19
2.4.5. Die Originalmessungen zum Quanten-Hall-Effekt . . . . .	26
2.5. Die van der Pauw-Methode . . . . .	27
2.6. Der persistente Photoeffekt . . . . .	30
<b>3. Versuchsaufbau</b>	<b>33</b>
<b>4. Bedienung des Kannensystems</b>	<b>36</b>
4.1. Einbau des Magnetsystems . . . . .	36
4.2. Einbau des Probenstabs und Probenwechsel . . . . .	37
4.3. Ausbau des Magnetsystems . . . . .	38
<b>5. Probenherstellung</b>	<b>38</b>
5.1. Hallbar . . . . .	38
5.2. Van der Pauw-Geometrie . . . . .	40
<b>6. Messungen</b>	<b>41</b>
6.1. Hallbar . . . . .	41
6.2. Van der Pauw-Geometrie . . . . .	42
<b>7. Auswertung</b>	<b>43</b>
7.1. Hallbar . . . . .	43
7.2. Van der Pauw-Geometrie . . . . .	43
<b>8. Ausblick</b>	<b>43</b>
<b>9. Literatur</b>	<b>46</b>
<b>A. Anhang A: Ein einführender Artikel zum QHE</b>	<b>48</b>
<b>B. Anhang B: Sicherheitshinweise</b>	<b>49</b>

# 1. Einleitung

Etwa 100 Jahre nach der ersten Veröffentlichung zum klassischen Hall-Effekt durch E. H. Hall hat Klaus von Klitzing am 5. Februar 1980 den Quanten-Hall-Effekt entdeckt. Dadurch wurde die physikalische Forschung der letzten 20 Jahre so maßgebend beeinflusst, dass der Quanten-Hall-Effekt bis zum heutigen Tag nichts an Aktualität verloren hat. Im Hochfeldmagnetlabor in Grenoble gelangen von Klitzing präzise Messungen des quantisierten Hallwiderstandes  $R_H$ , der nur von den Fundamentalkonstanten  $h$  (Plancksches Wirkungsquantum) und  $e$  (Elementarladung) abhängt. Für diese besondere Leistung wurde Klaus von Klitzing 1985 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet.

Experimentelle Voraussetzung für diese Entdeckung sind hohe magnetische Felder und tiefe Temperaturen, die Originalmessung z. B. wurde bei 18 T und 1,5 K durchgeführt. Außerdem tritt die Quantisierung nur an bestimmten Halbleiterbauelementen auf, durch die zweidimensionale Elektronengase realisiert sind. Dies sind z. B. die im vorliegenden Versuch verwendeten Halbleiterheterostrukturen, von Klitzing allerdings führte seine Messungen an MOSFETs (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor) durch.

Im klassischen Bild werden die Elektronen eines zweidimensionalen Elektronengases durch Anlegen eines starken Magnetfelds senkrecht zur Ebene der freien Beweglichkeit auf Kreisbahnen gezwungen, deren Zyklotronradien mit zunehmendem Magnetfeld kleiner werden.

Da das klassische Bild den Quanten-Hall-Effekt nur unzureichend erklärt, muss das Problem, wie schon der Name verrät, quantenmechanisch betrachtet werden. Die Quantisierung der Energiezustände äußert sich experimentell durch die Shubnikov-de Haas-Oszillationen des Längswiderstandes und durch die Plateaus in der Hallgeraden. Unabhängig von der Geometrie der Probe treten diese gerade bei den Werten

$$R_H = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{h}{e^2} = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8 \, \Omega, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

auf.

Für die Metrologie ist der Quanten-Hall-Effekt von großer Bedeutung. Auf Empfehlung des Internationalen Komitees für Maß und Gewichte (CIPM) wird der quantisierte Hallwiderstand  $R_H$  seit 1.1.1990 als Widerstandsnormale verwendet [25]. Da er sich nur aus Fundamentalkonstanten zusammensetzt und auch die Geometrie der Probe keinen Einfluss auf die Widerstandswerte der Hallplateaus hat, sind diese jederzeit exakt reproduzierbar. Durch hochentwickelte Messmethoden kann der quantisierte Hallwiderstand heute mit einer relativen Unsicherheit von  $10^{10}$  bestimmt werden [27], was die Genauigkeit der zuvor verwendeten Widerstandsnormale weit übersteigt. Zudem hat man somit eine Möglichkeit gefunden, eine weitere physikalische Einheit auf elementare Naturkonstanten zurückzuführen.

Neben der Metrologie ist der Quanten-Hall-Effekt auch in der Mikroelektronik von grundlegender Bedeutung. Die durch seine Entdeckung motivierte, intensive Forschung auf diesem Gebiet führt zu einem immer besseren Verständnis niedrigdimensionaler Systeme. Auch in der Mikroelektronik können die erforschten Eigenschaften Verwendung finden, und zwar dann, wenn die Abmessungen elektronischer Bauelemente so klein

werden, dass Quanteneffekte nicht mehr zu vernachlässigen sind. Der Ein-Elektron-Transistor (Single Electron Transistor) ist ein eindrucksvolles Beispiel für den Übergang der Mikro- zur Nanoelektronik.

Der Einblick in aktuelle Forschungsthemen und die Vermittlung moderner physikalischer Messmethoden sind wesentliche Lernziele des vorliegenden Praktikumsversuches. Auf die theoretischen Grundlagen, die Sie sich anhand dieses Versuchs erarbeiten, kann beim wissenschaftlichen Arbeiten in der Festkörper- und Halbleiterphysik nicht verzichtet werden. Zudem ist der Umgang mit tiefen Temperaturen, hohen Magnetfeldern und das Wissen um die Prinzipien der Probenpräparation nicht nur für spätere Diplom- oder Doktorarbeiten, sondern auch für das spätere Berufsleben, insbesondere in der Halbleiterindustrie, von Bedeutung.

## 2. Grundlagen zum Quanten-Hall-Effekt

Anhand des folgenden Kapitels sollen Sie sich die, für den Versuch wichtigen, theoretischen Grundlagen soweit erarbeiten, dass Sie die Entstehung des Quanten-Hall-Effekts und der Shubnikov-de Haas-Oszillationen erklären können.

Als Einstieg empfiehlt sich der beigefügte Artikel von Klaus von Klitzing, der im Spektrum der Wissenschaft vom März 1986 erschienen ist. An dieser Stelle sei auch auf weitere Literatur verwiesen, die zur Vorbereitung nützlich ist:

[3] - [6]: Allgemeine Lehrbücher zur Festkörper- bzw. Halbleiterphysik, mit deren Hilfe man sich einen Überblick verschaffen kann.

[1], [2]: Ausführliche Behandlung der Thematik.

Die quantenmechanischen Berechnungen im folgenden Kapitel sind vor allem [1] entnommen.

Die Ergebnisse Ihrer Vorbereitung sollen Sie, in eigenen Worten, in Ihrem Praktikumsprotokoll formulieren. Besonderer Wert soll dabei auf die folgenden Zusammenhänge gelegt werden:

- Was versteht man unter einem zweidimensionalen Elektronengas? Wie kommt es zustande und welche besonderen Eigenschaften besitzt es, die für den Versuch von Bedeutung sind?
- Was besagt das Drude-Modell und welche Aussagen lassen sich daraus für den klassischen Hall-Effekt ableiten?  
Führen Sie insbesondere die, im Abschnitt 2.2.1 angedeutete, Auswertung der klassischen Bewegungsgleichung durch.
- Beschreiben Sie das Phänomen des Quanten-Hall-Effekts und der Shubnikov-de Haas-Oszillationen.
- Was versteht man unter Landauaufspaltung?

- Was besagt das Randkanalmodell?
- Wenden Sie den Landauer-Büttiker-Formalismus auf eine Vierpunktmessung der Längsspannung an (vgl. Abbildung 10), erläutern Sie die Auswirkungen des Ergebnisses und verdeutlichen Sie sich den Unterschied zur Zweipunktmessung.
- Leiten Sie den Zusammenhang (48) her, der für die Berechnung der Ladungsträgerdichte aus den Shubnikov-de Haas-Oszillationen nötig ist. Gehen Sie dabei von Gleichung (47) aus und machen Sie sich den Einfluss der Spinaufspaltung klar.
- Wie entstehen lokalisierte Zustände und wofür sind sie nötig?
- Wie werden Messungen zum Quanten-Hall-Effekt durchgeführt?

Welche mathematischen Zusammenhänge sind für die Auswertung des Versuchs notwendig?

## 2.1. Das zweidimensionale Elektronengas

Grundlage der folgenden Quanten-Hall-Effekt-Untersuchungen sind zweidimensionale Elektronengase (2DEG), die entstehen, wenn man freie Elektronen z. B. in z-Richtung in einen geeigneten, schmalen Potentialtopf sperrt. In der x-y-Ebene können sich die Elektronen dann weiterhin frei bewegen, während ihre Bewegung senkrecht dazu durch den Verlauf des Potentials bestimmt wird. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass eine derartige Einschränkung der Elektronen eine Quantisierung der Energiewerte in z-Richtung bewirkt. Ist nur das unterste Energieniveau besetzt, so erfolgt die Bewegung der Elektronen nur in der x-y-Ebene, was die Bezeichnung zweidimensionales Elektronengas rechtfertigt. Im Folgenden wird ein Überblick über die Herstellung und die Eigenschaften solcher zweidimensionaler Systeme gegeben. Dabei wird ähnlich wie in [1] und [19] vorgegangen.

### 2.1.1. Herstellung

Zweidimensionale Elektronengase findet man z. B. in MOSFETs, an denen die ersten Messungen zum Quanten-Hall-Effekt durchgeführt wurden (vgl. 2.3.5), oder auch in Halbleiterheterostrukturen, die in diesem Praktikum verwendet werden. Für die Herstellung solcher Heterostrukturen werden verschiedene Halbleiterschichten mit Hilfe der Molekularstrahlepitaxie aufgewachsen. Dieses Verfahren ist so weit entwickelt, dass ein atomlagengenaues Wachstum möglich ist. Voraussetzung für ein defektfreies Aufwachsen ist allerdings, dass sich die Gitterkonstanten angrenzender Schichten nur geringfügig unterscheiden.

Geeignete Materialien sind z.B. Galliumarsenid (GaAs) und Aluminium-Gallium-Arsenid (AlGaAs), die zugehörige Schichtfolge ist in Abbildung 1 dargestellt.

Am Schichtübergang AlGaAs/GaAs fließen Elektronen vom Silizium-dotierten AlGaAs mit der höheren Bandlücke zum GaAs, dessen Leitungsband energetisch günstiger liegt. Dieser Ladungsträgertransfer gleicht die Fermienergien der beiden Schichten an

und sorgt für eine Verzerrung der Valenz- und Leitungsbander. Der so entstandene Potentialtopf sperrt die Elektronen in der Grenzschicht zwischen AlGaAs und GaAs ein [1].

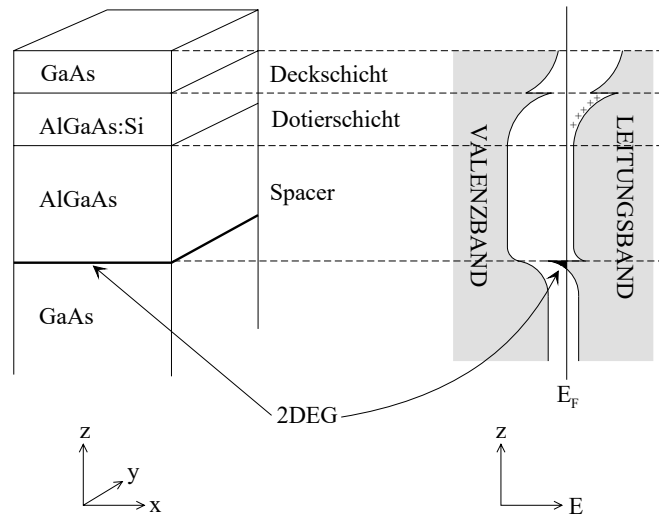


Abbildung 1: links: Schichtaufbau einer typischen Heterostruktur: Eine Deckschicht dient als Oxidationsschutz, und die Spacerschicht sorgt für die räumliche Trennung von Dotierschicht und 2DEG. rechts: Bandverlauf in der Heterostruktur: An der Grenzfläche zwischen GaAs und AlGaAs entsteht ein Potentialtopf, in den die Elektronen eingeschperrt sind.

Einen großen Einfluss auf die Materialeigenschaften hat die Spacer-Schicht (undotiertes AlGaAs). Durch sie sind die Donatoren von den Elektronen des 2DEGs räumlich getrennt, so dass diese weniger durch das Coulombpotential geladener Donatoren beeinflusst werden. Dadurch steigt die Beweglichkeit bzw. die mittlere freie Weglänge der Elektronen.

Zudem wird die Streuung der Elektronen an Phononen durch die Verwendung tiefer Temperaturen minimiert. Daraus resultieren extrem hohe Beweglichkeiten (im Bereich von  $100 \text{ m}^2(\text{Vs})^{-1}$ , zum Vergleich metallische Leiter: etwa  $0,005 \text{ m}^2(\text{Vs})^{-1}$ ) bzw. sehr große mittlere freie Weglängen bis in den  $\mu\text{m}$ -Bereich.

## 2.2. Quantenmechanische Betrachtung

Die Elektronen an der Grenzschicht betrachtet man quantenmechanisch als eingeschlossene Teilchen im Potentialtopf. Die Beschränkung durch das Potential führt zu einer Energiequantisierung in  $z$ -Richtung mit diskreten Energiewerten  $E_s$  ( $s = 0, 1, \dots$ ). Die Gesamtenergie eines Elektrons setzt sich aus dem vom Wellenvektor  $\vec{k}$  unabhängigen Anteil  $E_s$  und einem kontinuierlichen Anteil in  $x$ - $y$ -Richtung zusammen. Dieser wächst quadratisch mit dem Wellenvektor und spiegelt somit die uneingeschränkte Bewegung in der  $x$ - $y$ -Ebene wider [1].

$$E(s, k_x, k_y) = E_s + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*}, \quad (s = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

In dieser Dispersionsrelation ist  $m^*$  die effektive Masse, die dem Einfluss des periodischen Gitterpotentials Rechnung trägt.

Die Energien der Elektronen im Potentialtopf liegen somit auf Subbändern mit den Subbandenergiewerten  $E_s$  (siehe Abbildung 2).

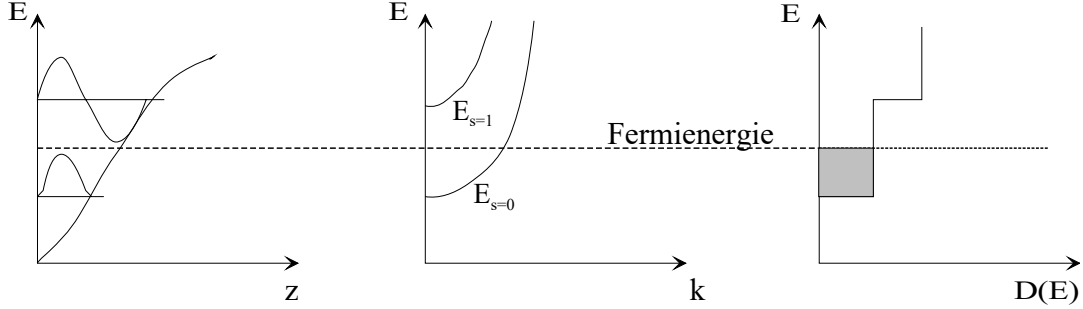


Abbildung 2: Darstellung der Energieniveaus (mit Wellenfunktionen) im annähernd dreieckigen Potentialtopf, der Subbänder im  $k$ -Raum und der in den einzelnen Subbändern konstanten Zustandsdichte. Bei tiefen Temperaturen ist nur das unterste Subband besetzt, so dass man von einem zweidimensionalen Elektronengas sprechen kann.

Die Abstände dieser diskreten Energieniveaus sind bei tiefen Temperaturen größer als die zur Verfügung stehende thermische Anregungsenergie. Bei den hier verwendeten Materialien ist deshalb, auf Grund der niedrigen Ladungsträgerdichte, nur das unterste Subband  $E_s = 0$  besetzt. Somit liegt ein echt zweidimensionales Elektronengas vor. Im Folgenden wird deshalb der Energienullpunkt auf  $E_0$  verschoben, so dass bei  $T = 0$  alle Zustände mit Gesamtenergie  $E(0, k_x, k_y)$  besetzt sind, für die  $E(0, k_x, k_y)$  kleiner als die Fermienergie  $E_F$  ist. Für zweidimensionale Systeme nimmt die Zustandsdichte eine besonders einfache Form an [19], sie ist innerhalb jedes Subbands konstant (vgl. Abbildung 2):

$$D(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}. \quad (2)$$

Für die Ladungsträgerdichte  $n_s$  und den Fermiwellenvektor  $k_F$  ergibt sich aufgrund der konstanten Zustandsdichte folgende Beziehung:

$$k_F = \sqrt{2\pi n_s}. \quad (3)$$

Daraus erhält man für die Fermienergie  $E_F$  und die Fermigeschwindigkeit  $v_F$

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*} = \frac{\hbar \sqrt{2\pi n_s}}{m^*} \quad (4)$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 \pi n_s}{m^*} \quad (5)$$

## 2.3. Der klassische Hall-Effekt

Fließt Strom durch einen Leiter, so werden bei Anlegen eines Magnetfelds senkrecht zur Stromrichtung Elektronen durch die Lorentzkraft abgelenkt. Durch Messung der entstehenden Hallspannung  $U_H$  und der Längsspannung  $U_{xx}$  kann das Material bezüglich seiner elektronischen Eigenschaften, Ladungsträgerdichte  $n_s$  und Beweglichkeit  $\mu$ , charakterisiert werden. Der klassische Hall-Effekt ist auch an zweidimensionalen Systemen beobachtbar, auf die sich die folgende Ausführung beschränkt<sup>1</sup>.

### 2.3.1. Theorie

Für schwache Magnetfelder, bei denen Quanteneffekte noch keine Rolle spielen, liefert das Drude-Modell ([10] und [11]) treffende Aussagen über den Transport im 2DEG.

Die Leitungselektronen werden als Teilchen betrachtet, die im Mittel nach einer vom Magnetfeld unabhängigen Zeit  $\tau$  gestreut werden, und sich während dieser Zeit wechselwirkungsfrei bewegen. Bei Anlegen eines kleinen elektrischen Feldes erhält man einen zusätzlichen Geschwindigkeitsbeitrag, die sogenannte Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$ , die Aufschluss über die Netto-Bewegung der Ladungsträger gibt. Den Zusammenhang der Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$  mit dem angelegten elektrischen Feld  $\vec{E}$  stellt Gleichung (6) dar

$$\vec{v}_D = \frac{e\tau}{m^*} \vec{E} = \mu \vec{E}, \quad (6)$$

wobei

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} \quad (7)$$

die Beweglichkeit der Elektronen beschreibt. Da die driftenden Elektronen Ladung transportieren, gilt für die gesamte Stromdichte:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = en_s \mu \vec{E} = en_s \vec{v}_D \quad (8)$$

Der Nettostrom allerdings wird, wie gezeigt werden kann [1], nur von Elektronen nahe der Fermikante (mit Energie  $E \approx E_F$  und Geschwindigkeit  $v \approx v_F$ ) getragen. Deshalb gilt für die mittlere freie Weglänge  $l$ , die die Strecke zwischen zwei Stößen angibt:

$$l = \tau v_F = \tau \frac{\hbar \sqrt{2\pi n_s}}{m^*} \quad (9)$$

Befindet sich das 2DEG im Magnetfeld, so baut sich senkrecht zum angelegten Feld  $E_x$  ein elektrisches Feld  $E_y$  auf, bis die Lorentzkraft kompensiert ist. Da die Leitfähigkeit dann durch einen Tensor beschrieben wird, muss die Beziehung  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  durch

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

<sup>1</sup>Diese ist im Wesentlichen der unter [20] und [19] aufgeführten Literatur entnommen.



ersetzt werden. Die Diagonalterme  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  des Leitfähigkeitstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  beschreiben die Leitfähigkeit in Richtung des angelegten Feldes und  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yx}$  die Hall-Leitfähigkeit senkrecht dazu. In isotropen Systemen, wie sie hier verwendet werden, gilt:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \text{ und } \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}.$$

Für die Messung ist der Widerstandstensor  $\boldsymbol{\rho}$  relevant, der aus dem Leitfähigkeitstensor durch Inversion berechnet werden kann.

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Um die Komponenten des Widerstandstensors  $\boldsymbol{\rho}$  bei angelegtem Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  zu bestimmen, wertet man die klassische Bewegungsgleichung im stationären Fall

$$\frac{m^*}{\tau} \vec{v}_D = e \left[ \vec{E} + (\vec{v}_D \times \vec{B}) \right] \quad (12)$$

aus, wobei  $\vec{v}_D = (v_x, v_y, 0)$  ist.

Unter Zuhilfenahme der Beziehungen (7) und (8) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_s e \mu} & -\frac{B}{n_s e} \\ \frac{B}{n_s e} & \frac{1}{n_s e \mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (13)$$

und durch Vergleich mit  $\vec{E} = \boldsymbol{\sigma} \vec{j}$

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{n_s e \mu} \quad (14)$$

$$\rho_{yx} = -\rho_{xy} = \frac{B}{n_s e} \quad (15)$$

Dieses Modell besagt also, dass  $\rho_{xx}$  konstant ist, während  $\rho_{yx}$  linear mit dem Magnetfeld ansteigt. Im  $\rho_{yx}$ - $B$ -Diagramm erhält man die sogenannte Hallgerade.

### 2.3.2. Das Experiment

Obige Ergebnisse lassen sich bei kleinen Magnetfeldern experimentell bestätigen (vgl. Abbildung 4 für kleine Magnetfelder).

Durchgeführt werden solche Messungen an 2DEGs, die mit einer Hallgeometrie (Abbildung 3) strukturiert sind. Der Strom  $I$  wird in x-Richtung durch die Probe geschickt (1→4) und das Magnetfeld  $B$  wirkt senkrecht dazu in z-Richtung. Dabei werden die Längsspannung  $U_{xx}$  (z. B. 2→3) und die Quer- bzw. Hallspannung  $U_H$  (z. B. 3→5) abgegriffen.

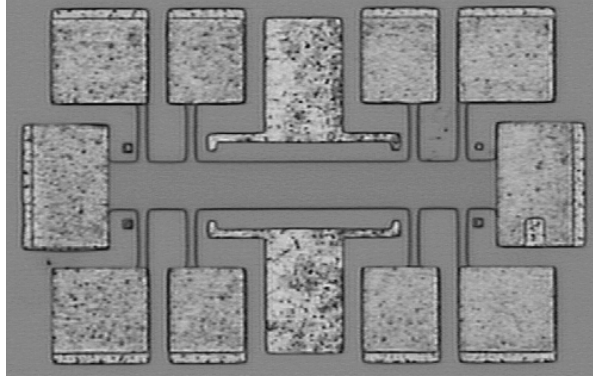


Abbildung 3: Hallbar mit zwei Messfeldern. Als Messfeld bezeichnet man die in der Abbildung schraffierte Fläche zwischen vier paarweise gegenüberliegenden Potentialsonden.

Die Komponenten des Widerstandstensors berechnen sich in zweidimensionalen Systemen unter Berücksichtigung der Probengeometrie wie folgt [1]:

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} = R_{xx} \frac{W}{L} \quad (16)$$

$$\rho_{yx} = \frac{U_H}{I} = R_H, \quad (17)$$

wobei  $W$  die Breite der Srompfads und  $L$  der Abstand zwischen zwei nebeneinander liegenden Potentialsonden ist.

Bezeichnend für zweidimensionale Systeme ist dabei, dass die Komponenten des Widerstandstensors gerade die Einheit Ohm besitzen, weswegen  $\rho_{yx}$  mit dem Hallwiderstand  $R_H$  übereinstimmt. Die Komponente  $\rho_{xx}$  hingegen ist bei zweidimensionalen Systemen identisch mit dem Schichtwiderstand  $R_{\square} = R_{xx} \frac{W}{L}$ , der als Widerstand einer Leerschicht mit Breite  $W$  und Länge  $L$  definiert ist. Die experimentelle Bestimmung der Materialgrößen  $n_s$  und  $\mu$  erfolgt durch Vergleich der Gleichungen (15) und (17) bzw. (14) und (16).

$$n_s = \frac{1}{e} \frac{1}{\frac{d\rho_{yz}}{dB}} = \frac{I}{e} \frac{1}{\frac{dU_H}{dB}} \quad (18)$$

$$\mu = \frac{1}{n_s e \rho_{xx}} = \frac{1}{n_s e} \frac{I}{U_{xx}} \frac{L}{W} = \frac{1}{n_s e R_{\square}}. \quad (19)$$

Dabei ist  $\frac{d\rho_{yz}}{dB}$  die Steigung der Hallgerade. Da  $\rho_{xx}$  unabhängig vom Magnetfeld ist, liest man diese Größe am einfachsten als Nullfeldwiderstand bei  $B = 0$  ab.

## 2.4. Der Quanten-Hall-Effekt und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen

Bringt man ein System mit einem 2DEG bei genügend tiefer Temperatur (einige Kelvin) in ein starkes, dazu senkrechtes Magnetfeld und misst den Hall- und den Längswiderstand in Abhängigkeit vom B-Feld, so treten bei hohen Feldern vom klassischen Bild abweichende Effekte auf.

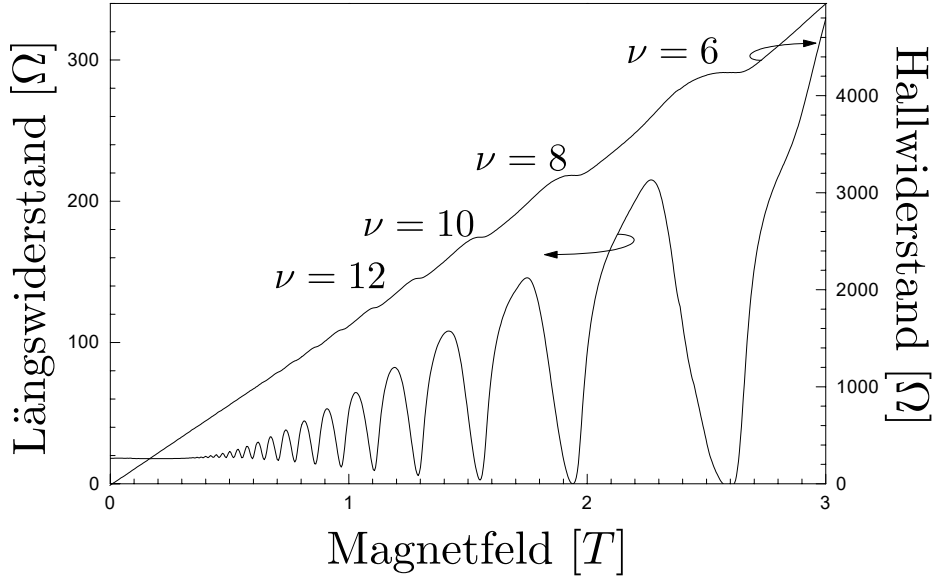


Abbildung 4: Eine typische Messung zum Hall-Effekt: Die Widerstände können bei kleinen Magnetfeldern mit dem klassischen Drude-Modell beschrieben werden, während bei höheren Feldern Quanteneffekte einsetzen. Im Längswiderstand beobachtet man die Shubnikov-de Haas-Oszillationen und im Hallwiderstand die Ausbildung von Plateaus, den sogenannten Quanten-Hall-Effekt. Da die Spinaufspaltung nicht aufgelöst wird, sind nur geradzahlige Füllfaktoren beobachtbar.

Bei schwachem Magnetfeld erhält man die erwartete Hall-Gerade, während sich bei höherem Feld waagrechte Plateaus ausbilden (vgl. Abbildung 4), die unabhängig von der Geometrie der Probe bei den Widerstandswerten

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{\nu} \cdot 25812,8\Omega, (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

auftreten [12]. Dieses Phänomen wird als Quanten-Hall-Effekt (QHE) bezeichnet. Außerdem setzen bei höheren Feldern im Längswiderstand Oszillationen ein, während dieser bei kleinen Feldern konstant ist. Die Minima der sogenannten Shubnikov-de Haas-Oszillationen (SdH-Oszillationen), in denen der Längswiderstand verschwindet, liegen genau bei den Magnetfeldwerten, bei denen sich auch die Plateaus in der Hall-Gerade befinden.

Der Quanten-Hall-Effekt und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen sollen im Folgenden erklärt werden. Eine ausführliche Behandlung findet man beispielsweise in [1] und [2], während [3]-[6] einen Überblick über die Thematik geben.

### 2.4.1. Das 2DEG im Magnetfeld

Das Energiespektrum der Elektronen eines zweidimensionalen Elektronengases wird in einem äußeren Magnetfeld senkrecht zur x-y-Ebene vollständig diskretisiert.

Dies ergibt sich aus der folgenden quantenmechanischen Betrachtung eines in der x-y-Ebene freien Elektrons, bei der wie in [1] vorgegangen wird. Das  $B$ -Feld ist durch ein Vektorpotential  $\vec{A}$  im Hamiltonoperator berücksichtigt, so dass die zu lösende Schrödingergleichung folgende Form besitzt:

$$\left( \frac{(i\hbar\nabla + e\vec{A}(x, y))^2}{2m^*} + U(y) \right) \Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad (21)$$

wobei das sogenannte Randpotential  $U(y)$  die Einschränkung der Elektronenbewegung auf die Breite der Hallbar ausdrückt und der Energienullpunkt auf die Energie  $E_0$  des untersten Subbands gelegt wurde.

Wählt man das Vektorpotential  $\vec{A} = (-By, 0, 0)$ , so zeigt  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  in z-Richtung und die Schrödingergleichung nimmt, bei Vernachlässigung des Randpotentials ( $U(y) = 0$ ), eine einfachere Gestalt an

$$\frac{1}{2m^*} ((p_x + eBy)^2 + p_y^2) \Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad (22)$$

wobei  $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$  und  $p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$  ist. Zur Lösung wird der Separationsansatz

$$\Psi(x, y) = \varphi(x)\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx)\chi(y) \quad (23)$$

verwendet, wobei  $\varphi(y)$  eine ebene Welle in x-Richtung beschreibt, der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{L}}$  der Normierung dient und die Funktion  $\chi(y)$  der Gleichung

$$\frac{1}{2m^*} [(\hbar k + eBy)^2 + p_y^2] \chi(y) = E\chi(y), \quad (24)$$

genügt. Diese lässt sich in die Gleichung

$$\left[ \frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (y + y_k)^2 \right] \chi(y) = E\chi(y) \quad (25)$$

überführen, die der Schrödingergleichung eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators mit Frequenz  $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$  entspricht, der auf der y-Achse um die Zentrumsordinate  $y_k = \frac{\hbar k}{eB}$  vom Nullpunkt verschoben ist.

Die zugehörigen Eigenfunktionen haben die Form

$$\chi_{n,k}(y) = \exp \left[ -\frac{(q + q_k)^2}{2} \right] H_n(q + q_k) \quad (26)$$

wobei  $q = \sqrt{\frac{m^* \omega_c}{\hbar}} y$ ,  $q_k = \sqrt{\frac{m^* \omega_c}{\hbar}} y_k$  und  $H_n$  das n-te Hermitesche Polynom ist.

Die für die weitere Betrachtung wichtigen Eigenwerte sind unabhängig von  $k$  und können nur diskrete Werte annehmen.

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

Dies sind die Energiewerte der sogenannten Landauniveaus, in die sich das unterste Energiesubband unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes aufspaltet. Die kontinuierliche Energieparabel  $E_0(k)$  des untersten Subbands ist also in diskrete Energiewerte quantisiert (siehe Abbildung 5).

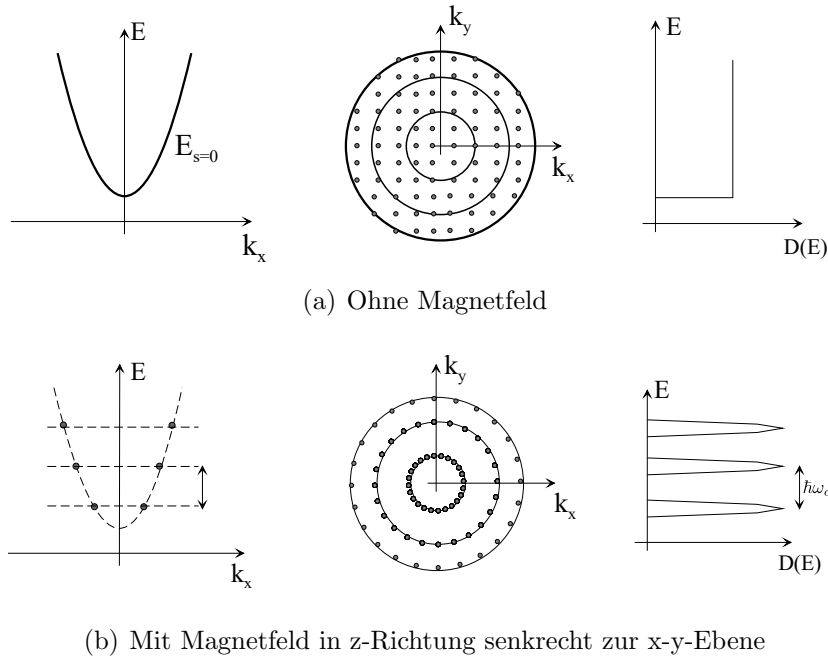


Abbildung 5: (nach [3] und [4])

(a) Ohne Magnetfeld liegen die Zustände des untersten Subbands  $E_s = 0$  gleichverteilt im  $\vec{k}$ -Raum innerhalb des Fermikreises, die Zustandsdichte ist konstant.

(b) Bei Anlegen des Magnetfeldes gehen die kontinuierlichen Zustände des Subbands  $E_s = 0$  in diskrete Zustände bei den Energiewerten der Landauniveaus  $E_n$  über. Im  $k$ -Raum kondensieren die Zustände auf Kreislinien und die Zustandsdichte spaltet in die diskreten Landauniveaus auf. Der Entartungsgrad der Niveaus entspricht der Anzahl der Elektronenzustände auf den Kreislinien.

Betrachtet man die Situation im  $\vec{k}$ -Raum, so sind die besetzten Zustände ohne äußeres Feld gleichmäßig innerhalb eines Kreises mit Radius  $k_F$  verteilt. Bei Anlegen eines Magnetfelds werden die Zustände auf konzentrische Kreise zusammengezogen (vgl. Abbildung 5).

Dadurch spaltet auch die konstante Zustandsdichte bei Anlegen des  $B$ -Felds in eine Reihe äquidistanter  $\delta$ -Peaks auf, die bei den Energiewerten der Landauniveaus auftreten und einen energetischen Abstand von  $\hbar\omega_c$  haben. Die einzelnen Niveaus sind entartet, wobei der Entartungsgrad die Anzahl der Elektronenzustände pro Landauniveau angibt.

Das quantenmechanische Ergebnis ist plausibel, wenn man die Situation klassisch betrachtet. Beim Anlegen eines äußeren magnetischen Feldes werden die Elektronen auf Kreisbahnen mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (28)$$

gezwungen, welche wiederum Überlagerungen von zueinander senkrechten harmonischen Schwingungen mit der Frequenz  $\omega_c$  sind.

Auch die Zentrumsordinate  $y_k$  ermöglicht die Veranschaulichung des quantenmechanischen Ergebnisses: Die entarteten Zustände eines Landauniveaus werden durch Wellenfunktionen dargestellt, die von  $k$  abhängen und somit um unterschiedliche Zentrumskoordinaten  $y_k$  zentriert sind. Die verschiedenen Elektronenzustände repräsentieren also unterschiedliche Bereiche der Probe [22].

Der Entartungsgrad eines Landauniveaus ergibt sich somit aus der Zahl der Zentrumskoordinaten  $y_k$  die auf der Probe der Länge  $L$  und Breite  $W$  „Platz“ finden [21]. Nimmt man periodische Randbedingungen an

$$k = n_x \frac{2\pi}{L}, \quad (n_x \text{ ganze Zahl}),$$

so ergibt sich für den Abstand  $\Delta y_k$  der Zentrumskoordinaten

$$\Delta y_k = \frac{\hbar}{eB} \Delta k,$$

und die Anzahl berechnet sich wie folgt:

$$\frac{W}{\Delta y_k} = \frac{WeBL}{2\pi\hbar} = LW \frac{eB}{h}$$

Der Entartungsgrad  $N_L$  normiert auf die Einheitsfläche beträgt somit

$$N_L = \frac{eB}{h}. \quad (29)$$

In diesem Zusammenhang ist auch der Füllfaktor  $\nu$  eines zweidimensionalen Elektronengases von Bedeutung. Dieser ist als die Anzahl der mit Elektronen gefüllten Landauniveaus definiert [26]

$$\nu = \frac{n_s}{\frac{eB}{h}} = \frac{n_s}{N_L}, \quad (30)$$

wobei unter Berücksichtigung des Spins alle Spinniveaus als separate Landauniveaus gezählt werden. Bei kleinen Magnetfeldern ( $\leq 6\text{T}$ ) und Temperaturen von etwa  $4,2\text{ K}$ , wie sie in diesem Praktikumsversuch der Fall sind, ist die Spinaufspaltung  $g\mu_B B$  ( $g$  ist der Landéfaktor,  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton) klein gegen den Abstand  $\hbar\omega_c$  der Landauniveaus, das heißt die einzelnen Spinniveaus können nicht aufgelöst werden. Jeder Elektronenzustand eines Landauniveaus ist demnach unter Berücksichtigung der Spinartung mit zwei Elektronen (spin-up, spin-down) besetzt, so dass die Anzahl der Elektronen pro Landauniveau  $2N_L$  (vgl. Formel (29)) entspricht. In diesem Fall ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Füllfaktor  $\nu$  und der Anzahl  $i$  der besetzten Landauniveaus:

$$\nu = 2i. \quad (31)$$

In der folgenden theoretischen Behandlung wird die Spinartung der Landauniveaus stets vorausgesetzt.

#### 2.4.2. Das Randkanalmodell

Elektrische Leitung ist generell nur möglich, wenn sich freie Elektronenzustände an der Fermikante befinden. Deshalb würde man vermuten, dass der Widerstand dann am kleinsten ist, wenn die Fermienergie mit einem Landauniveau zusammenfällt. In Wirklichkeit ist aber genau das Gegenteil der Fall. Der Widerstand ist minimal, wenn die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus liegt. Wie aber kann eine Probe Strom transportieren, wenn es zwischen den Landauniveaus gar keine Zustände gibt?

Die Antwort ist, dass sich solche Zustände, die am Rand der Probe anzusiedeln sind, aufgrund der endlichen Abmessungen der Probe ausbilden. Dies ergibt sich, wenn man den Einfluss des bisher vernachlässigten Randpotentials berücksichtigt. Bei der folgenden quantenmechanischen Behandlung wird wie in [1] vorgegangen. Im Fall eines rechteckigen Leiters beschreibt das in Abbildung 6 dargestellte Potential  $U(y)$  die Situation. Da die Schrödingergleichung (21) analytisch nur für ein parabelförmiges Randpotential gelöst werden kann, nützt man hier die Störungsrechnung 1. Ordnung, sowie die Lösung der Schrödingergleichung für den Fall  $U(y) = 0$ . Für die Dispersionsrelation ergibt sich näherungsweise folgende Beziehung:

$$E(n, k) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \langle n, k | U(y) | n, k \rangle. \quad (32)$$

Jeder Zustand  $|n, k\rangle$  wird durch eine Wellenfunktion dargestellt, die um die von  $k$  abhängige Koordinate  $y_k$  zentriert ist und eine räumliche Ausdehnung proportional zu  $\hbar^{\frac{1}{2}}(m^*\omega_c)^{\frac{1}{2}}$  besitzt. Nimmt man an, dass das Potential  $U(y)$  entlang der Ausdehnung jedes Zustands nahezu konstant ist, so ergibt sich

$$E(n, k) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + U(y_k) \text{ mit } y_k = \frac{\hbar k}{eB}. \quad (33)$$

In Abbildung 6 ist die Dispersionsrelation  $E(n, k)$  gegen  $k$  bzw.  $y_k$  aufgetragen.

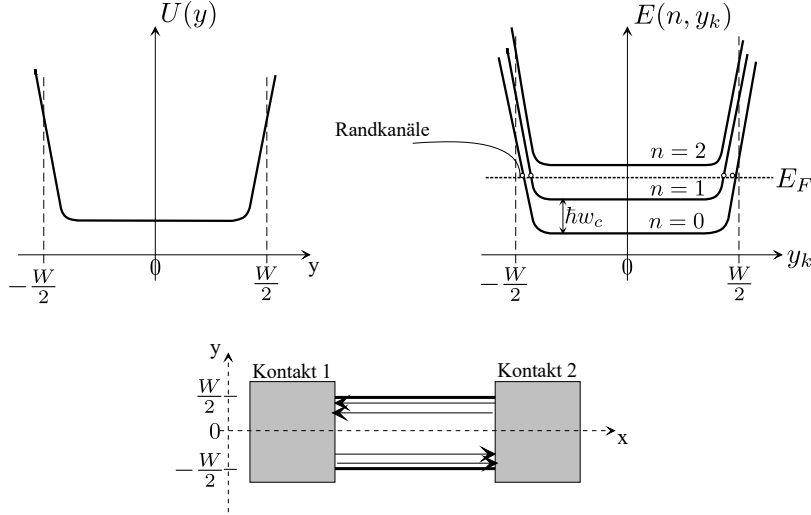


Abbildung 6: Berücksichtigt man das Randpotential  $U(y)$ , so spiegelt sich dieses auch in der Energiedispersion wider. Die Landauniveaus werden an den Rändern der Probe nach oben gebogen, so dass dort Zustände an der Fermikante entstehen. Diese werden als Randkanäle bezeichnet und sind in der Probengeometrie als Pfeile angedeutet. Die Anzahl  $i$  der Landauniveaus unterhalb der Fermikante entspricht der Anzahl der Randkanäle.

Man erkennt, dass die Landauniveaus nicht mehr konstant sind, sondern sich unter dem Einfluss des Randpotentials zum Rand hin aufbiegen. Das heißt am Rand existieren Zustände mit kontinuierlichen Energien, die die Fermienergie schneiden und als Randzustände bezeichnet werden.

Aus der Berechnung der Gruppengeschwindigkeit der Elektronen [1]

$$v(n, k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(n, k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \frac{\partial y_k}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \quad (34)$$

ergibt sich, dass im Innern der Probe kein elektrischer Transport erfolgt, denn dort ist  $\frac{\partial U(y)}{\partial y} = 0$  und somit auch  $v(n, k) = 0$ . Am Rand allerdings ist  $v(n, k) \neq 0$ , wobei die Randzustände an gegenüberliegenden Seiten der Probe den Strom in entgegengesetzte Richtungen transportieren, da das Vorzeichen von  $\frac{\partial U(y)}{\partial y}$  wechselt.

Im klassischen Analogon spricht man von den sogenannten „skipping orbits“ (vgl. Abbildung 7). Im Innern der Probe können die Ladungsträger ungestörte Zyklotronbahnen durchlaufen, weswegen sie nicht zum Ladungstransport beitragen. Die zugehörigen Energiezustände sind die ungestörten Landauniveaus. Am Rand der Probe stoßen die



Ladungsträger allerdings auf die Probenbegrenzung und werden elastisch reflektiert, die Zyklotronbahnen sind nicht mehr geschlossen. Stattdessen „hüpfen“ die Ladungsträger am Probenrand entlang, auf Grund der Lorentzkraft an gegenüberliegenden Rändern in entgegengesetzte Richtungen.

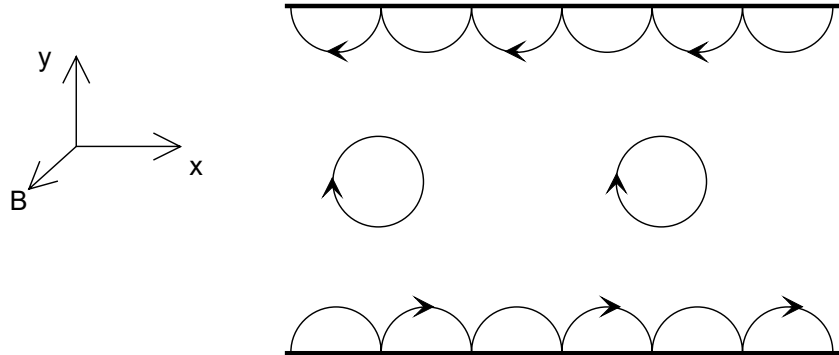


Abbildung 7: Skipping orbits

Klassisch bewegen sich Elektronen im Magnetfeld auf Kreisbahnen. Am Probenrand werden sie reflektiert und tragen somit zum Stromtransport bei.

Die räumliche Trennung der Zustände, welche Ladungsträger in verschiedene Richtungen transportieren, hat zur Folge, dass Rückstreuung völlig unterdrückt wird. Dazu müsste ein Elektron von einem Randkanal zu einem auf der gegenüberliegenden Seite der Probe gestreut werden, was aber nahezu unmöglich ist, wenn sich die Fermienergie zwischen zwei Landaniveaus befindet. Denn dann gibt es im Innern der Probe keine erlaubten Zustände, über die Streuung erfolgen kann.

Der Überlapp zweier Wellenfunktionen mit entgegengesetzter Gruppengeschwindigkeit, also zweier Zustände an gegenüberliegenden Rändern der Probe, ist zudem wegen der geringen räumlichen Ausdehnung der Wellenfunktionen extrem klein. Die Streuwahrscheinlichkeit zwischen den Leitungskanälen einer idealisierten Probe geht demnach gegen Null.

Das bedeutet, dass ein Elektron, das an einem Ende der Probe in einen Randkanal eintritt, keine andere Wahl hat, als sich bis zum nächsten Kontakt am Rand der Probe entlang zu bewegen. Selbst nach Streuung an Störstellen wird es sofort wieder in Vorwärtsrichtung gezwungen.

### 2.4.3. Der Landauer-Büttiker-Formalismus

Das Randkanalbild kann durch den Landauer-Büttiker-Formalismus beschrieben werden, der insbesondere für die Erklärung der elektronischen Eigenschaften sehr kleiner Systeme von Bedeutung ist, und im Folgenden ähnlich wie in [26] eingeführt wird.

Ausgangspunkt ist ein System mit endlicher Ausdehnung, das eine bestimmte Anzahl  $j$  von Kontakten besitzt, die auf verschiedenen chemischen Potentialen  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, j$ ) liegen. Es wird angenommen, dass der Strom lediglich von  $i$  Randkanälen getragen wird,

die auf Grund der endlichen Abmessungen des Systems entstehen, wenn die Fermienergie zwischen dem  $(i - 1)$ -ten und dem  $i$ -ten Landauniveau liegt.

Der Transport im System wird dann durch Transmissions- und Reflexionswahrscheinlichkeiten  $T_{kl}$  bzw.  $R_{kk}$  beschrieben. Hierbei ist die Anordnung der Indizes so gewählt, dass  $T_{kl}$  die Wahrscheinlichkeit für den Streuprozess ist, bei dem ein Elektron aus dem Kontakt  $l$  in den Kontakt  $k$  gestreut wird, und  $R_{kk}$  die Reflexion vom Kontakt  $k$  zurück in diesen angibt.

Der Einfachheit halber wird zunächst ein System mit nur zwei Kontakten der chemischen Potentiale  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  betrachtet, bei dem der Stromtransport in nur einem Randkanal ( $i = 1$ ) erfolgt (vgl. Abbildung 8).

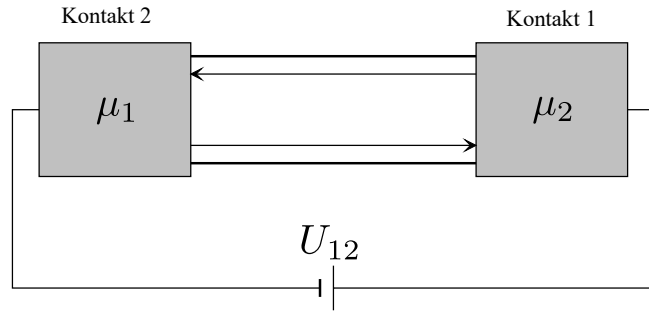


Abbildung 8: Eine Probe mit zwei Kontakten an die die Spannung  $U_{12}$  angelegt ist. Der Strom wird ausschließlich von Randkanälen getragen, die nach dem Landauer- Büttiker-Formalismus jeweils die Leitfähigkeit  $G = 2\frac{e^2}{h}$  besitzen.

Für die Spannung  $U_{kl}$  zwischen zwei Kontakten gilt allgemein

$$U_{kl} = \frac{\mu_k - \mu_l}{e}, \quad (35)$$

in diesem speziellen Fall also  $U_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}$ .

Für die Transmissions- bzw. Reflexionswahrscheinlichkeiten gilt

$$T_{12} = T_{21} = 1 \text{ und } R_{11} = R_{22} = 0, \quad (36)$$

und die spinentartete Zustandsdichte eines Randkanals ist die eines eindimensionalen Systems

$$D(E) = \frac{1}{\pi \hbar v(E)} \quad (37)$$

wobei  $v(E)$  die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen ist. Der Nettostrom  $I_1$  am Kontakt 1 berechnet sich aus der Differenz von auslaufendem und in den Kontakt zurücklaufenden Strom. Letzterer setzt sich zusammen aus den reflektierten und den aus dem gegenüberliegenden Kontakt 2 einlaufenden Elektronen, so dass die Ratengleichung für den Nettostrom am Kontakt 1

$$I_1 = e \int_0^{\mu_1} D(E)v(E) dE - \left( e \int_0^{\mu_1} R_{11}D(E)v(E) dE + e \int_0^{\mu_2} T_{12}D(E)v(E) dE \right) \quad (38)$$

lautet. Wertet man diese Gleichung aus, so ergibt sich für den Nettostrom:

$$I_1 = 2\frac{e}{h}(\mu_1 - \mu_2) = 2\frac{e^2}{h}U_{12}. \quad (39)$$

Analog ergibt sich  $I_2 = -I_1 = -2\frac{e^2}{h}U_{12}$ .

Die Leitfähigkeit des Randkanals

$$G = 2\frac{e^2}{h} \quad (40)$$

ist damit nur durch Naturkonstanten bestimmt [1], wobei sich der Faktor 2 aus der vorausgesetzten Spinartung der Landauniveaus ergibt.

Wendet man den Landauer-Büttiker-Formalismus auf verschiedene Probengeometrien mit mehreren Randkanälen an, so wird deutlich, dass auch in diesen Fällen jeder spinentartete Randkanal eine Leitfähigkeit von  $G = 2\frac{e^2}{h}$  besitzt.

Vor allem aber ermöglicht der Landauer-Büttiker-Formalismus die Berechnung des Nettostroms  $I_k$  in den  $k$ -ten Kontakt einer beliebigen Probengeometrie mit beliebig vielen Randkanälen. Auf den allgemeinen Formalismus, der z. B. in [1] ausführlich beschrieben ist, wird hier der Einfachheit halber verzichtet. Für ideale Systeme mit  $i$  Randkanälen, Reflexionswahrscheinlichkeit Null und Transmissionswahrscheinlichkeit Eins bzw. Null, wie sie in Abschnitt 2.3.4 berechnet werden sollen, lässt sich die allgemeine Formel zur Berechnung des Nettostroms unter Berücksichtigung der Spinartung wie folgt vereinfachen:

$$I_k = 2\frac{e}{h} \left[ i\mu_k - \sum_{l \neq k} iT_{kl}\mu_l \right]. \quad (41)$$

In Analogie zur Berechnung des Stroms  $I_1$  bei der Probe mit nur zwei Kontakten und einem Randkanal, setzt sich der Nettostrom auch hier aus dem Anteil der aus dem Kontakt  $k$  auslaufenden und der in den Kontakt einlaufenden Elektronen zusammen.

#### 2.4.4. Erklärung des Quanten-Hall-Effekts

##### Anwendung des Landauer-Büttiker-Formalismus auf Vierpunktmessungen

Zur Erklärung des QHE wendet man den Landauer-Büttiker-Formalismus nun auf Vierpunktmessungen an [26], zunächst auf ein Hallkreuz (vgl. Abbildung 9).

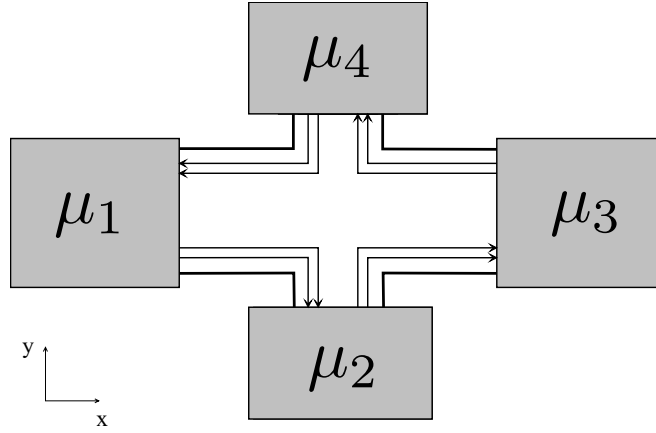


Abbildung 9: Hallkreuz zur Messung der Hallspannung

Wird der Strom nur von den Randkanälen getragen, so ist die angelegte Spannung  $U_{13}$  mit der Hallspannung, die zwischen den Kontakten 2 und 4 abgegriffen wird, identisch.

Liegt die Fermienergie gerade zwischen zwei Landauniveaus, so wird der Strom ausschließlich von den Randzuständen getragen, die Voraussetzungen für den Landauer-Büttiker-Formalismus sind somit erfüllt und es gilt:

$$T_{14} = T_{43} = T_{32} = T_{21} = 1$$

$$T_{kl} = 0 \text{ sonst.}$$

Für den Fall, dass gerade  $i$  Landauniveaus besetzt sind, also unterhalb der Fermienergie liegen, ergibt sich mit (40) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = 2\frac{e}{h} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Da an den Potentialsonden stromlos gemessen wird, ist  $I_2 = I_4 = 0$  und für die chemischen Potentiale der vier Kontakte gilt:

$$\mu_2 = \mu_1 \text{ und } \mu_4 = \mu_3. \quad (43)$$

Außerdem ist  $I_1 = -I_3 = I = 2i\frac{e}{h}(\mu_1 - \mu_3) = 2i\frac{e^2}{h}U_{13}$  (vgl. Formel (35)), wobei  $U_{13}$  die an die Kontakte 1 und 3 angelegte Spannung ist.

Aus 42 folgt nun, dass die an gegenüberliegenden Kontakten gemessene Hallspannung  $U_H$  mit der angelegten Spannung  $U_{13}$  identisch ist:

$$U_H = \frac{\mu_4 - \mu_2}{e} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{e} = U_{13}. \quad (44)$$

Der Hallwiderstand  $R_H$  besitzt somit den Wert

$$R_H = \frac{U_H}{2i \frac{e^2}{h} U_{13}} = \frac{U_H}{2i \frac{e^2}{h} U_H} = \frac{1}{2i} \frac{h}{e^2}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (45)$$

Erinnert man sich an den Zusammenhang (31) zwischen der Anzahl  $i$  der besetzten Landauniveaus und dem Füllfaktor  $\nu$ , so lässt sich der Hallwiderstand auch wie folgt schreiben:

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad (\nu = 2, 4, 6, \dots). \quad (46)$$

Bei spinentarteten Landauniveaus, wie sie bisher betrachtet wurden, sind in der Hallgeraden also nur die Plateaus mit geradzahligem Füllfaktor beobachtbar. Erst bei sehr hohen Feldern kann die Spinaufspaltung experimentell aufgelöst werden, so dass auch Plateaus mit ungeradem Füllfaktor auftreten und die hergeleitete Formel mit der aus 20 identisch ist.

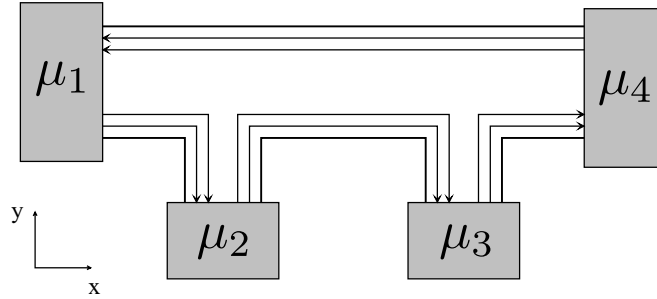


Abbildung 10: Vierpunktmessung der Längsspannung

Die angelegte Spannung  $U_{14}$  bewirkt einen Strom vom Kontakt 1 zum Kontakt 4. Die Längsspannung wird zwischen den Kontakten 2 und 3 abgegriffen und verschwindet, wenn der Stromtransport nur über die Randkanäle erfolgt.

Die Shubnikov-de Haas-Oszillationen kann man durch Anwenden des Landauer-Büttiker-Formalismus auf eine Probe mit vier Kontakten erklären, die wie in Abbildung 10 gezeigt angeordnet sind. Bei dieser Vierpunktmessung des Längswiderstands ( $I_2 = I_3 = 0$ ) erhält man durch Auswerten des zugehörigen Gleichungssystems

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad (47)$$

d. h. das Potential längs eines Kanals ändert sich nicht. Die Elektronen, die aus dem Kontakt 1 mit Potential  $\mu_1$  kommen, behalten dieses entlang des gesamten Kanals bei, was bedeutet, dass längs des Kanals keine Spannung abfällt, der Stromtransport also widerstandsfrei erfolgt.

Hieraus erklärt sich der verschwindende Längswiderstand bei den Minima der SdH-Oszillationen, die wie die Plateaus dann auftreten, wenn die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus liegt.

Damit lässt sich eine weitere Methode zur Berechnung der Ladungsträgerdichte entwickeln [1]. Sind gerade  $i$  spinentartete Landauniveaus vollständig besetzt, so befindet sich der Längswiderstand im Minimum und der zugehörige Magnetfeldwert  $B_i$  kann bestimmt werden. Bei vorgegebener Ladungsträgerdichte  $n_s$  gilt also unter Berücksichtigung der Spinaufspaltung:

$$n_2 = \nu N_L = 2i N_L = 2i \cdot \frac{eB}{h}. \quad (48)$$

Für zwei nebeneinanderliegende Minima ergibt sich die Beziehung

$$\left( \frac{1}{B_{i+1}} - \frac{1}{B_i} \right) = \Delta \frac{1}{B_i} = 2 \frac{e}{n_s h}, \quad (49)$$

d.h. bei veränderlichem Magnetfeld sind die Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen periodisch in  $\frac{1}{B}$ .

Aus einem Diagramm, in dem die reziproken Magnetfeldwerte  $\frac{1}{B_i}$  an denen Minima auftreten gegen die entsprechenden Indizes  $i$  der Minima aufgetragen sind, kann die Steigung der Ausgleichsgeraden ermittelt und zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte herangezogen werden.

Aus dem verschwindenden Längswiderstand ergibt sich außerdem ein messtechnischer Vorteil, denn die Sonden zur Messung der Hallspannung müssen somit nicht exakt gegenüber liegen.

### Lokalisierte Zustände durch Störpotentiale

Bisher ist nur der Fall betrachtet worden, dass  $E_F$  zwischen zwei Landauniveaus liegt. Dies scheint aber zunächst gar nicht möglich zu sein. Betrachtet man ein im Magnetfeld befindliches System<sup>2</sup>, so sind die Zustände auf den Landauniveaus kondensiert. Bei tiefer Temperatur sind alle Landauniveaus mit  $E_n < E_F$  voll besetzt, wobei die Fermienergie  $E_F$  durch das höchste besetzte Landauniveau definiert ist.

Wird das Magnetfeld erhöht, so wird sowohl der Abstand  $\hbar\omega_c = \hbar \frac{eB}{m^*}$  der Landau-niveaus, als auch ihr Entartungsgrad (siehe Formel 29) größer. Das bedeutet, dass die Landauniveaus sich zu höheren Energien verschieben, wobei die Fermienergie dem obersten besetzten Niveau folgt. Gleichzeitig finden aber auch die Elektronen des obersten Niveaus auf den energetisch tieferliegenden Platz. Ist der Entartungsgrad der unteren Niveaus groß genug, um alle Elektronen des obersten Niveaus aufnehmen zu können, so dass dieses völlig entleert ist, so springt die Fermienergie abrupt auf das nächsttiefere Landauniveau. Dies ist in Abbildung 11 mit dem Landaufächer dargestellt.

Demnach würde die Fermienergie immer mit dem obersten besetzten Landauniveau übereinstimmen und läge nie zwischen zwei Niveaus.

Gerade diese Situation war aber Voraussetzung für das Verschwinden des Längswiderstands und die Bildung der Plateaus im Hallwiderstand. Es muss also Zustände zwischen den Landauniveaus geben, auf denen die Fermienergie liegen kann. Eine Möglichkeit bieten

<sup>2</sup>Es sei an dieser Stelle auf die im Folgenden benützte Literatur [2] und [22] verwiesen.

die Randzustände, deren Anzahl aber im Vergleich zu denen auf den Landauniveaus zu gering ist, als dass sich die Fermienergie dort stabilisieren könnte.

In realen Proben allerdings führen Verunreinigungen und Kristalldefekte im Material zu Störstellen, durch die auf die Elektronen des 2DEGs ein zusätzliches, räumlich zufälliges Potential wirkt.

Die Energiedispersion  $E(n, k)$  ist unter dem Einfluss von Störpotentialen auch im Inneren der Probe nicht mehr unabhängig von  $k$ , sondern weist Fluktuationen auf (siehe Abbildung 12). Dadurch verbreitern sich die  $\delta$ -Peak-förmigen Landauniveaus energetisch und es entstehen ausgedehnte Zustände.

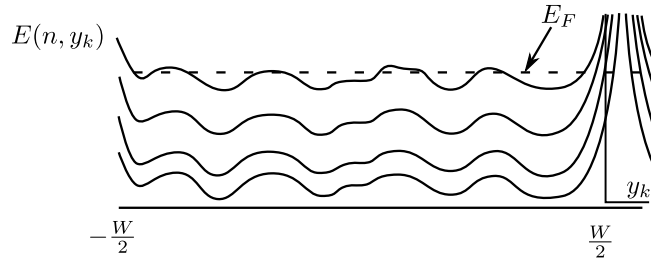


Abbildung 11: Unter dem Einfluss von Störpotentialen ist die Energiedispersion auch im Innern der Probe nicht mehr konstant (nach [13]).

Die Fluktuationen haben außerdem zur Folge, dass auch im Innern der Probe Zustände an der Fermikante existieren. Dort entstehen ebenfalls Leitungskanäle, die aber in sich geschlossen sind, so dass Elektronen in bestimmten, voneinander getrennten Raumbe-  
reichen eingefangen werden. Deren energetische Zustände weichen weit von den Landauniveaus ab und können nicht mehr zum Stromtransport beitragen, weswegen sie auch als lokalisiert bezeichnet werden. Die Fermienergie kann sich nun auf einer Vielzahl von Zuständen stabilisieren, die energetisch zwischen den Landauniveaus  $E_n = (n + \frac{1}{2})$  liegen (vgl. Abbildung 13).

Die Auswirkungen der lokalisierten Zustände auf den Transport in der Probe sind in Abbildung 14 dargestellt. Liegt die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, so transportieren die Randkanäle den Strom nach wie vor widerstandsfrei. Im Gegensatz zu den bisherigen, idealisierten Annahmen existieren jetzt aber auch im Innern der Probe Elektronenzustände an der Fermikante (vgl. Abbildung 14(a)).

Über diese lokalisierten Zustände können die Elektronen aber nicht gestreut werden, so dass der widerstandsfreie Transport in den Randkanälen nicht beeinflusst wird. Es ergeben sich die Minima der SdHs und die Plateaus in der Hallgeraden.

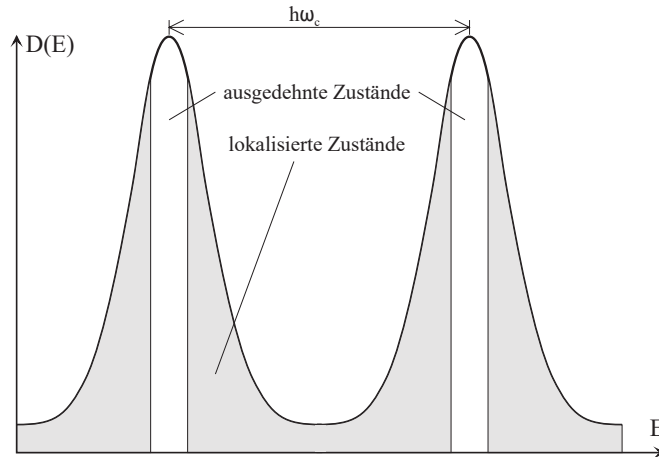


Abbildung 12: Verunreinigungen und Kristalldefekte führen zu einer Verbreiterung der Landauniveaus (ausgedehnte Zustände) und zu lokalisierten Zuständen (aus [22]).

Verschiebt sich das oberste besetzte Landauniveau durch weitere Magnetfelderhöhung in Richtung der Fermienergie, so beginnt sich der innerste Kanal vom Rand weg zu bewegen und es setzt Rückstreuung ein (vgl. Abbildung 14(b) und (c)). Sobald das oberste besetzte Landauniveau in der Fermienergie liegt, bricht der innerste Kanal komplett in lokalisierte Zustände auf. Jetzt gibt es im Innern der Probe kontinuierliche, erlaubte Zustände, über welche die Elektronen von einem zum gegen überliegenden Rand der Probe gestreut werden können (vgl. Abbildung 14(d)). Die räumliche Trennung entgegengesetzter Ströme ist somit vollständig aufgehoben. Der Längswiderstand wird maximal und ist umso höher, je weniger Kanäle sich noch am Rand der Probe befinden, in denen die Ladungen widerstandslos transportiert werden, je weniger Landauniveaus sich also unterhalb der Fermienergie befinden.

Ausschlaggebend dafür, ob sich im Längswiderstand gerade ein Maximum oder ein Minimum ausbildet, ist die Lage der Fermienergie relativ zu den Landauniveaus. Immer dann, wenn sich die Fermienergie genau in einem Landauniveau befindet, erhält man ein Maximum, und ein Minimum liegt vor, wenn sich die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus auf lokalisierten Zuständen stabilisiert. Überraschend ist, dass der Quanten-Hall-Effekt und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen nur deshalb beobachtet werden können, weil sich durch Kristalldefekte und Verunreinigungen Störpotentiale in der Probe ausbilden. Extrem hochbewegliche Proben mit wenigen Störstellen lassen keine gute Darstellung des Quanten-Hall-Effekts zu. Die Plateaus im Hallwiderstand und ebenso die Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen sind nur sehr schwach ausgeprägt.

Zu viele Störstellen allerdings würden die Beweglichkeit der Ladungsträger so weit einschränken, dass der Quanten-Hall-Effekt wiederum nicht beobachtbar wäre, so dass bei der Auswahl des Probenmaterials ein Mittelweg gefunden werden muss.



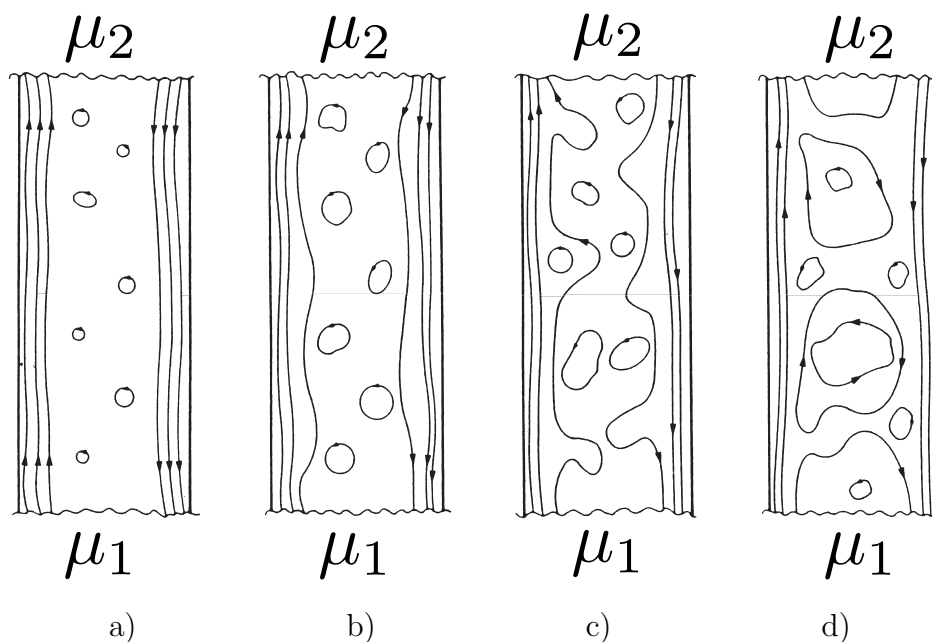


Abbildung 13: Elektronenzustände an der Fermikante bei von (a) nach (d) zunehmender Magnetfeldstärke (nach [13])

- (a) Die Fermienergie liegt zwischen dem 3. und 4. Landauniveau, am Rand befinden sich somit drei Kanäle, die widerstandsfrei leiten. Die lokalisierten Zustände in der Mitte tragen nicht zum Stromtransport bei.
- (b) Mit zunehmendem Magnetfeld wandert das 3. Landauniveau in Richtung der Fermienergie und der innerste Randkanal bewegt sich vom Probenrand weg.
- (c) Die Rückstreuung setzt ein.
- (d) Die Fermienergie liegt im 3. Landauniveau und der innerste Randkanal ist vollständig in lokalisierte Zustände aufgebrochen.

### Gültigkeitsbereich des klassischen Modells

Es bleibt schließlich noch zu klären, ab welcher Größe des Magnetfelds die für den Quanten-Hall-Effekt verantwortlichen Quanteneffekte auftreten, bzw. bis zu welchem Magnetfeld das klassische Modell seine Gültigkeit behält.

Um dies abzuschätzen kann die einfache klassische Vorstellung der im B-Feld auf Kreisbahnen gezwungenen Elektronen zu Hilfe genommen werden [19]. In diesem klassischen Bild werden die für den Quanten-Hall-Effekt ausschlaggebenden Effekte auf Elektronen zurückgeführt, die mehrere Zyklotronbahnen ungestört durchlaufen können. Das heißt die Umlaufzeit  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$  muss deutlich kleiner sein als die Zeit  $\tau$ , nach der ein Elektron im Mittel gestreut wird. Unter Ausnutzung von (7) und (28) ist dies äquivalent zu

$$\mu B \gg 2\pi. \quad (50)$$

Diese Abschätzung ist zwar quantenmechanisch nicht exakt, den experimentellen Anforderungen jedoch genügt sie vollkommen. Aus Beziehung 49 ist außerdem ersichtlich,

dass der QHE bei moderaten Magnetfeldern erst beobachtet werden konnte, als es gelang, Proben mit sehr hohen Beweglichkeiten herzustellen.

### 2.4.5. Die Originalmessungen zum Quanten-Hall-Effekt

Der Vollständigkeit halber wird hier noch auf die Originalmessungen zum Quanten-Hall-Effekt von Klaus von Klitzing eingegangen. Diese sind nicht an GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen, sondern an Si-MOSFETs (Metal-Oxid-Semiconductor Field-Effect Transistor) durchgeführt worden.

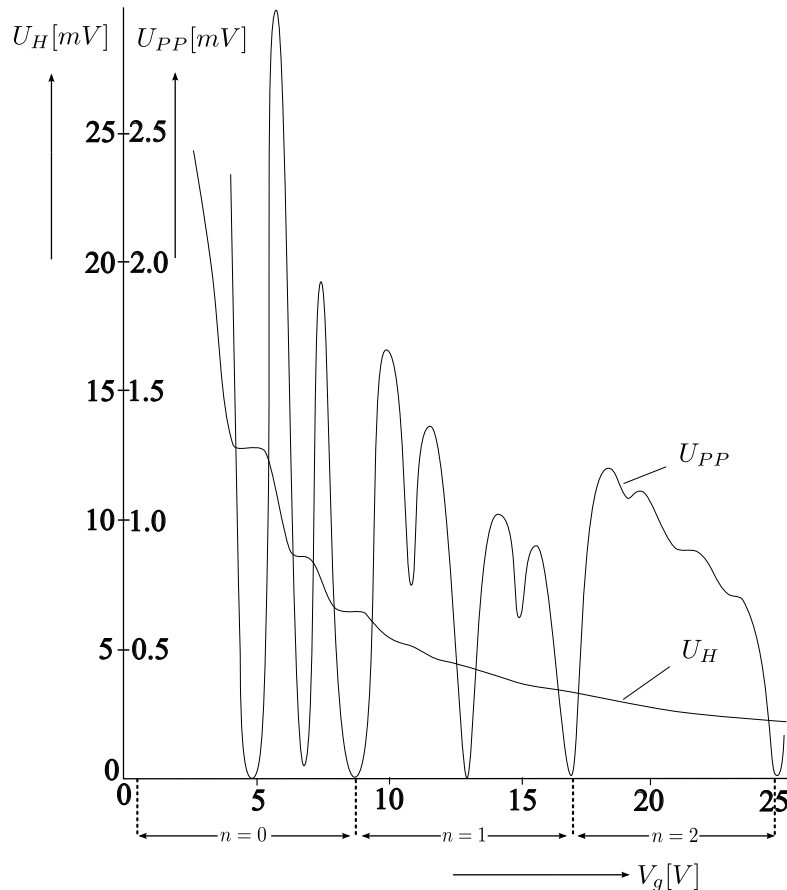


Abbildung 14: Die 1980 von Klaus von Klitzing in [12] veröffentlichte Messung der Längs- und Hallspannung  $U_{pp}$  bzw.  $U_H$  bei 1,5 K und einem konstanten Magnetfeld von 18 T an einer Si-MOSFET-Struktur. Mit der Gatespannung  $V_G$  wird die Ladungsträgerdichte variiert.

Dabei hat man durch eine Gatespannung  $V_G$  die Ladungsträgerdichte, welche bis zu 100mal niedriger ist als die in Heterostrukturen, variiert, während das Magnetfeld konstant gehalten wurde. Der Unterschied zwischen einer solchen Quanten-Hall-Effekt-Messungen an MOSFETs und denen an Heterostrukturen, wie sie auch im Praktikum durchgeführt werden, ist im Wesentlichen dadurch bedingt, dass die Relativbewegung

der Fermienergie zu den Landauniveaus auf unterschiedliche Weise verursacht wird. Bei Heterostrukturen schieben sich die Landauniveaus aufgrund der B-Feld-Variation durch die Fermienergie, die sich wegen der konstanten Ladungsträgerdichte nicht ändert. Bei MOSFETs hingegen bietet sich die Variation der Ladungsträgerdichte bei konstantem Magnetfeld an, so dass sich hier die Fermienergie durch die Landauniveaus bewegt.

Auch in den Messdiagrammen ist ein Unterschied bemerkbar, der sich aber anhand von Gleichung 30 erklären lässt. Bei Heterostrukturen wird der Füllfaktor  $\nu$  mit steigendem Magnetfeld kleiner, während bei MOSFETs eine direkte Proportionalität des Füllfaktors  $\nu$  zur Ladungsträgerdichte besteht.

## 2.5. Die van der Pauw-Methode

Um auf einer Halbleiterheterostruktur eine Hallgeometrie zu definieren, müssen aufwendige Verfahren wie optische Lithographie und nasschemisches Ätzen verwendet werden. Die Materialeigenschaften können so zwar mit großer Genauigkeit bestimmt werden, aber insbesondere für eine schnelle Charakterisierung des Materials ist eine einfachere Probenpräparation wünschenswert. Hierzu eignet sich die Methode von L. J. van der Pauw [16], welche die Bestimmung des Widerstands von Halbleiterproben beliebiger Form ermöglicht, und im Folgenden für zweidimensionale Systeme beschrieben wird.

Unter einer van der Pauw-Geometrie, wie sie in Abbildung 16 dargestellt ist, versteht man ein Halbleiterstück beliebiger Form, das an vier Stellen A, B, C und D kontaktiert ist und den folgenden Anforderungen genügt:

- Die Kontakte sind klein und am Rand der Probe angebracht.
- Die Dotierung ist homogen und gleichmäßig.
- Im Innern der Probe sind keine Löcher.

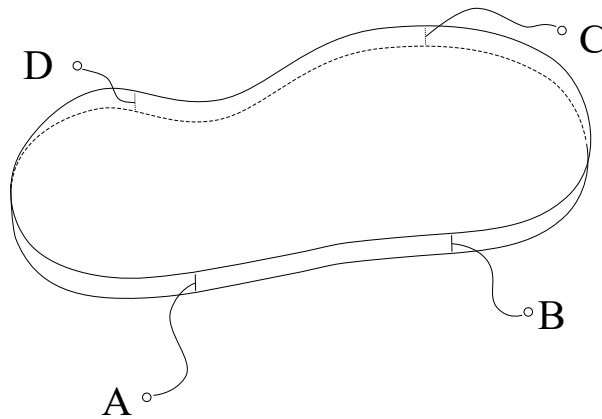


Abbildung 15: Schema der van der Pauw-Methode (nach [8]):

Ein beliebig geformtes Halbleiterstück wird am Rand an vier Stellen A, B, C und D kontaktiert.

Das Problem bei der Bestimmung des Widerstands eines Halbleiterstücks beliebiger Form ist, dass dieser von der Wahl der Abgriffpunkte abhängt. Mit Hilfe der van der Pauw-Methode kann der Widerstand durch zyklisches Vertauschen der Kontakte bestimmt werden. Diese Methode ist im Folgenden behandelt, wobei ähnlich wie in [8] vorgegangen wird.

Dazu wird zunächst der Widerstand  $R_{ABCD}$

$$R_{ABCD} = \frac{U_{AB}}{I_{CD}} \quad (51)$$

definiert, wobei  $U_{AB}$  die zwischen den Kontakten A und B abgegriffene Spannung ist, wenn ein Strom  $I_{CD}$  von C nach D durch die Probe fließt. Dabei ist auf stromlose Messung der Spannung  $U_{AB}$  zu achten, um die Messung nicht zu verfälschen. Mittels funktionentheoretischer Berechnungen konnte van der Pauw zeigen, dass die Widerstände  $R_{ABCD}$  und  $R_{BCDA}$  bei zyklischer Vertauschung der Kontakte der folgenden Relation genügen:

$$\exp \left\{ -\frac{\pi R_{ABCD}}{\rho} \right\} + \exp \left\{ -\frac{\pi R_{BCDA}}{\rho} \right\} = 1. \quad (52)$$

Hierbei ist  $\rho$  der Widerstand des Halbleitermaterials.

Diese Gleichung kann man nach  $\rho$  auflösen

$$\rho = \frac{\pi}{\ln(2)} \left( \frac{R_{ABCD} + R_{BCDA}}{2} \right) f(Q) \quad (53)$$

wobei  $Q = \frac{R_{ABCD}}{R_{BCDA}}$  und  $f(Q)$  der van der Pauw-Korrekturfaktor ist. Die Funktion  $f(Q)$  ist durch die Gleichung

$$\frac{Q-1}{Q+1} = \frac{f}{\ln(2)} \cosh^{-1} \left[ \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\ln(2)}{2} \right\} \right] \quad (54)$$

definiert [8] und kann numerisch bestimmt werden. Der zugehörige Graph ist in Abbildung 17 dargestellt und wird zur Bestimmung des Widerstands  $\rho$  graphisch ausgewertet. Bei zweidimensionalen Systemen stimmt  $\rho$  mit dem Schichtwiderstand  $R_{\square}$  der Probe überein.

In der Praxis tauscht man gewöhnlich die Kontakte A;B;C und D zyklisch durch und bestimmt die Widerstände  $R_{ABCD}, R_{BCDA}, R_{CDAB}, R_{DABC}$ . Gleichung (52) wertet man dann für alle möglichen Kombinationen aus und mittelt über die erhaltenen Widerstände.

Auch an dieser einfachen van der Pauw-Geometrie ist es möglich, den Quanten-Hall-Effekt und die SdHs zu beobachten. Dazu wird zunächst, bei veränderlichem Magnetfeld senkrecht zur Ebene des 2DEGs, der Längswiderstand gemessen. Die Abgriffpunkte entsprechen denen bei Messung des Widerstands  $R_{ABCD}$  (bzw. zyklische Vertauschung der Kontakte). In einer weiteren Messung kann die Hallspannung z.B. in den Punkten A und C abgegriffen werden, wenn der Strom über die Kontakte B und D fließt.

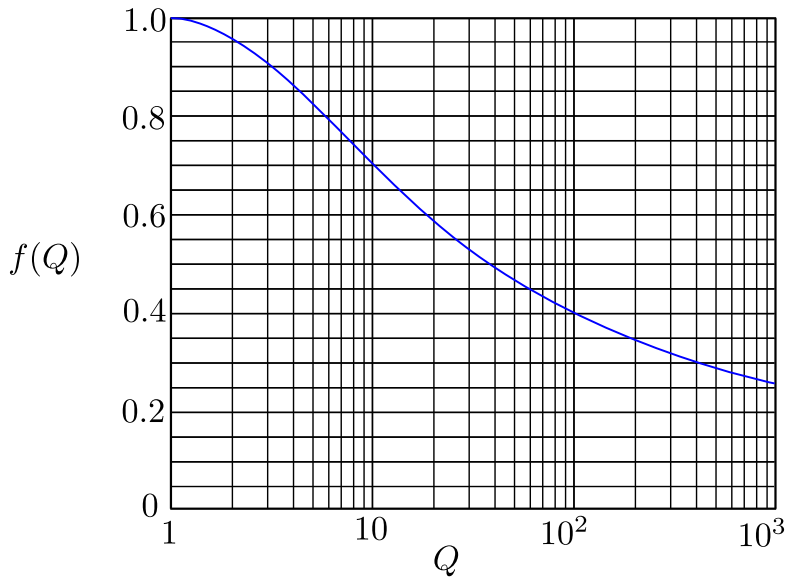


Abbildung 16: Die Funktion  $f(Q)$  wird durch Gleichung (53) definiert und für die Berechnung des Widerstands nach der van der Pauw-Methode benötigt (aus [8]).

Es ist von Vorteil, wenn die Probe symmetrisch, z.B. quadratisch, ist. Dadurch lässt sich die Offsetspannung bei der Messung der Hallspannung weitgehend vermeiden. Auch durch das Messen mit Wechselstrom und das Mitteln über den positiven und negativen Magnetfeldbereich lassen sich die, durch diese Messmethode bedingten, Messfehler einschränken. Innerhalb der Probe sind zudem bei tiefen Temperaturen die thermoelektrischen Effekte, die das Messergebnis beeinträchtigen können, nur schwach ausgeprägt. Auf die Diskussion dieser Effekte und die Messanordnungen zur Unterdrückung der entsprechenden Fehler, sowie auf den Einfluss der endlichen Kontaktflächen wird deshalb, im Rahmen dieses Praktikumsversuches, nicht näher eingegangen. Es sei aber auf weiterführende Literatur [8] und [23] verwiesen.

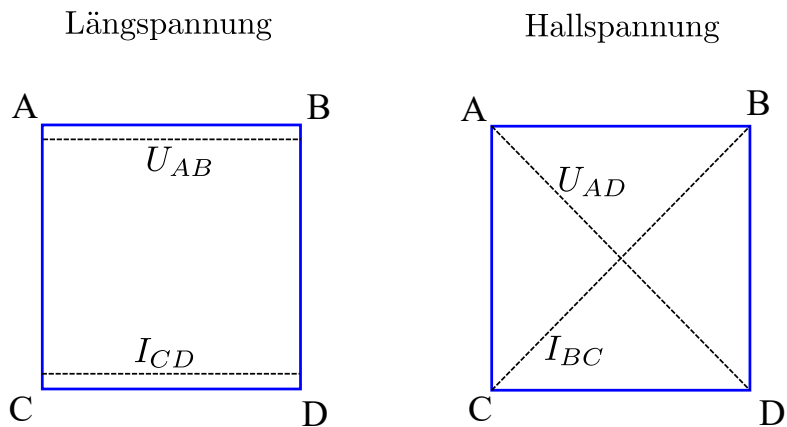


Abbildung 17: Messung der Längs- (links) bzw. der Hallspannung (rechts) an einer quadratischen van der Pauw-Geometrie.

## 2.6. Der persistente Photoeffekt

Ein entscheidender Parameter bei Messungen zum Quanten-Hall-Effekt ist die Ladungsträgerdichte. Bei den hier verwendeten Proben kann sie nicht direkt geregelt werden, da bei der Probenstrukturierung auf ein Gate verzichtet worden ist. Allerdings bietet der persistente Photoeffekt<sup>3</sup> (Persistent Photo Conductivity, kurz PPC) eine Möglichkeit, die Ladungsträgerdichte  $n_s$  in GaAs-AlGaAs Heterostrukturen für einen längeren Zeitraum zu erhöhen. Beleuchtet man die abgekühlte Probe kurz, so steigt  $n_s$  und behält diesen Wert, solange die Probe nicht über eine bestimmte Temperatur (etwa 150 K) erwärmt wird. Die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte vor und nach der Belichtung bei tiefen Temperaturen ist in Abbildung 19 gezeigt. Aus ihr ist auch ersichtlich, dass die Ladungsträgerdichte nach dem Belichten ab einer gewissen Temperatur wieder gleiches Verhalten wie vor der Beleuchtung aufweist. Der Vorgang der Ladungsträgerdichteerhöhung durch den PPC ist also reversibel und kann durch Erwärmen wieder gelöscht werden.

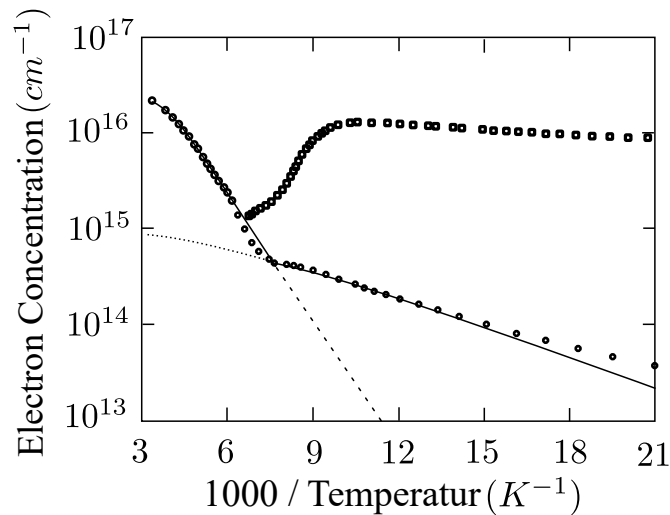


Abbildung 18: Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte (aus [15]):

Kühlt man Si-dotiertes AlGaAs von Zimmer- auf Heliumtemperatur, so nimmt die Ladungsträgerdichte kontinuierlich ab und weist beim anschließenden Erwärmen wieder die gleiche Temperaturabhängigkeit auf.

Belichtet man allerdings die abgekühlte Probe, so steigt die Ladungsträgerdichte stark. Dieser erhöhte Wert bleibt auch nach der Belichtung (mehrere Tage) erhalten, solange die Probe nicht über 150 K erwärmt wird. Steigt die Temperatur noch weiter, so zeigen die belichtete und die unbelichtete Probe wieder gleiches Verhalten.

### Erklärung des PPC durch DX-Zentren

Die elektrische Leitfähigkeit der Probe resultiert aus den freien Ladungsträgern, die von der Silizium-dotierten AlGaAs-Schicht zur Verfügung gestellt werden. Dabei gibt das als

<sup>3</sup>Bei der Erstellung dieses Kapitels wurde auf [24] zurückgegriffen.

Donator fungierende Siliziumatom sein überschüssiges Elektron ab. Solche Elektronen nehmen energetische Niveaus zwischen Valenz- und Leitungsband des Halbleiters ein. Man unterscheidet hierbei zwei Fälle.

Liegt das Elektronenniveau so nahe unterhalb der Leitungsbandkante, dass die Energiedifferenz durch thermische Anregung überwunden werden kann, so spricht man von flachen Störstellen. Die Leitfähigkeit des Halbleiters bei tiefen Temperaturen wird im Wesentlichen auf die von solchen flachen Störstellen abgegebenen Elektronen zurückgeführt (vgl. flache Gerade in Abbildung 19).

Durch Dotierung können aber auch noch energetisch tiefer liegende Störstellen entstehen, die thermisch nicht mehr anregbar sind. Trotzdem ist z. B. durch Photoneneinstrahlung eine Ionisierung dieser tiefen Störstellen möglich, die aber meist schon nach kurzer Zeit wieder mit Elektronen des Leitungsbands rekombinieren. Nur bei Temperaturen unterhalb 150 K kann der persistente Photoeffekt beobachtet werden, da dann die angeregten Ladungsträger längerfristig erhalten bleiben. Dies deutet auf eine Energiebarriere hin, die bei tiefen Temperaturen eine Rückkehr der Ladungsträger in den ursprünglichen Zustand verhindert.

Man geht davon aus, dass die tiefen Störstellen von sogenannten DX-Zentren herrühren, die neben der, bei tiefen Temperaturen unüberwindbaren, Potentialbarriere auch eine Verzerrung des Gitters verursachen. Im Silizium-dotierten AlGaAs werden die Silizium-Atome auf den Plätzen der Gallium-Atome ins Kristallgitter eingebaut (siehe Abbildung 20), wodurch flache Störstellen entstehen. Neben dieser symmetrischen Lage im Gitter gibt es für das Silizium, aber auch noch energetisch günstigere Konfigurationen, bei denen sich das Gitter verzerrt. Diese asymmetrischen Gleichgewichtslagen werden DX-Zentren genannt und führen zu tiefen Störstellen.

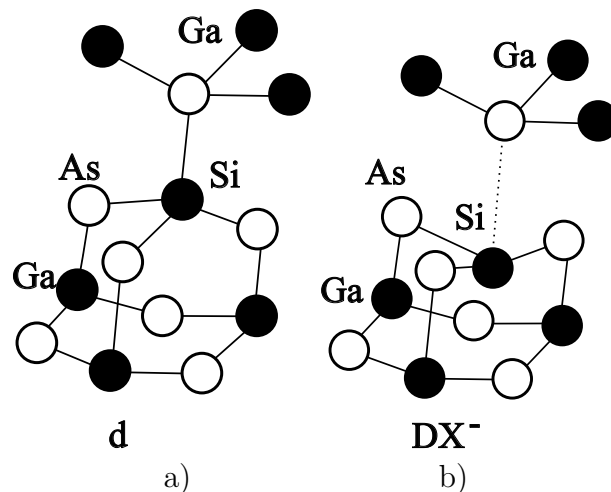


Abbildung 19: Ein Si-Atom wird in ein GaAs-Gitter an Stelle eines Ga-Atoms eingebaut. Neben der symmetrischen Lage im Gitter (a) existiert auch ein asymmetrischer Gleichgewichtszustand (b). Dieser liegt unter Umständen energetisch günstiger und wird als DX-Zentrum bezeichnet (aus [14]).

Rechnungen von Chadi und Chang [14] ergaben, dass das Energieminimum eines DX-Zentrums erst durch Aufnahme eines weiteren Elektrons (von einem anderen Donator) erreicht wird. Die DX-Zentren sind also negativ geladen und können z. B. durch Photonen ( $E \approx 1$  eV) angeregt werden. Diese angeregten Zustände können entweder unter Aussendung von Photonen wieder zu DX-Zentren rekombinieren oder in symmetrische Zustände relaxieren. Letzteres führt zu einer Erhöhung der Ladungsträgerdichte, da die zuvor gebundenen Elektronen als Leitungselektronen zur Verfügung stehen. Eine Rückkehr in energetisch günstigere DX-Zustände ist bei tiefen Temperaturen nicht möglich, da dies einen Wechsel der räumlichen Lage der Silizium-Atome erfordern würde, wozu die thermische Energie aber nicht ausreicht. Erst bei weiterer Erwärmung kann diese Energiebarriere überwunden werden. Da bei dem hier verwendeten Material die DX-Zentren gegenüber den flachen Störstellen bevorzugt sind, dominiert deren Verhalten dann wieder die Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte von der Temperatur (vgl. steile Gerade in Abbildung 19).



### 3. Versuchsaufbau

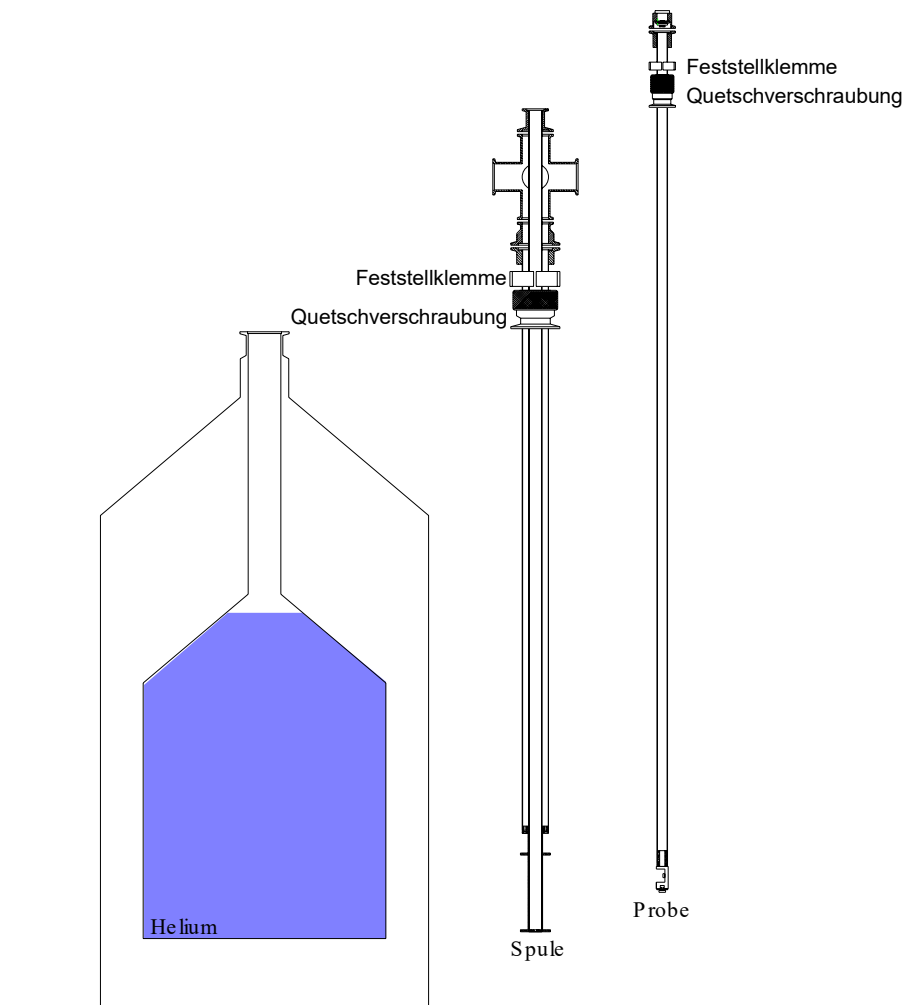


Abbildung 20: Heliumkanne, Magnetsystem und Probenstab werden ineinander gefügt und ergeben den fertigen Versuchsaufbau. Das Magnetsystem ist 1252 mm und der Probenstab 1337 mm lang.

Um Magnetotransportmessungen an Halbleiterproben (Herstellung vgl. Abschnitt 5) durchführen zu können, müssen zwei experimentelle Voraussetzungen erfüllt sein: Zum einen benötigt man hohe magnetische Felder, und zum anderen tiefe Temperaturen. Der im Praktikum verwendete Messaufbau besteht aus einem Magnetsystem (vgl. Abbildung 21), das in eine 65 l Helium-Kanne<sup>4</sup> eingebaut werden kann. Ein separater Probenstab, an dessen unterem Ende die Probe befestigt wird, kann in den im Magnetsystem integrierten Probenraum eingeführt werden. In diesem befindet sich flüssiges Helium, so dass alle Messungen direkt bei  $T = 4,2$  K durchgeführt werden. Das Kannensystem ist

<sup>4</sup>Das ist eine Kanne, die für den Transport und die Aufbewahrung von flüssigem Helium vorgesehen ist.

an eine Rückführung angeschlossen, die das verdampfende Helium wieder in die Verflüssigungsanlage leitet.

Die Stromleitungen zur Probe verlaufen im Inneren des Probenstabs und werden an ein Schaltbrett angeschlossen. Letzteres ermöglicht ein übersichtliches Abgreifen der Probenkontakte und ein schnelles Umstecken. Zum Aufnehmen der sehr schwachen Messsignale werden analoge Lock-in-Verstärker verwendet und die Messergebnisse über die nachgeschalteten Digitalmultimeter (DMM) vom Computer ausgelesen. In Abbildung 22 ist der elektronische Messaufbau schematisch dargestellt.

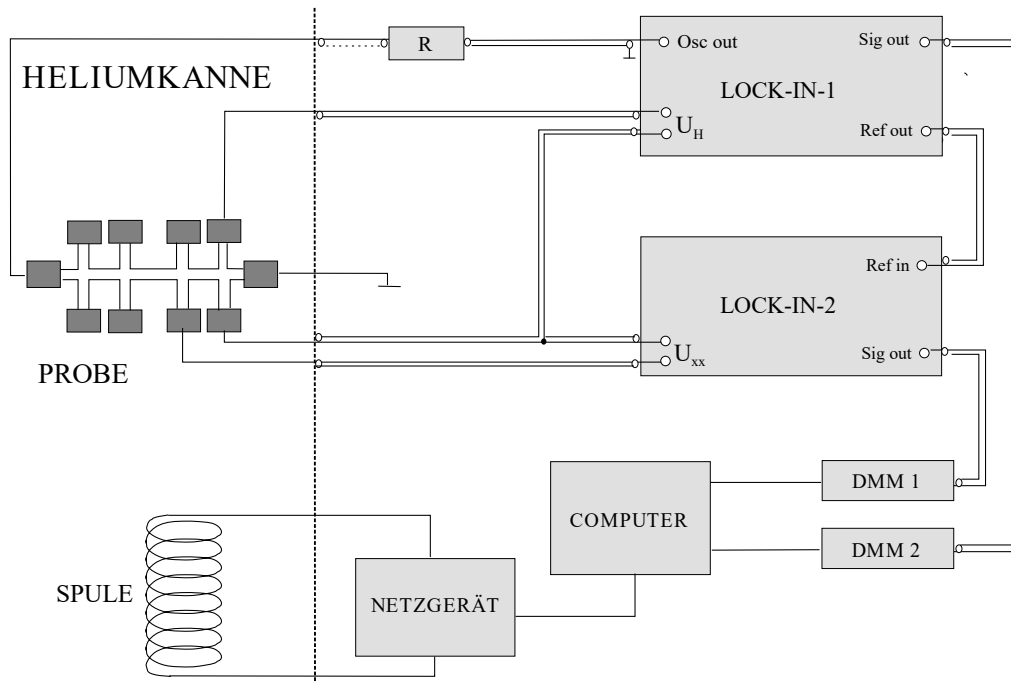


Abbildung 21: Überblick über die einzelnen Komponenten des elektronischen Messaufbaus.

Die wichtigsten Bestandteile des Versuchs, und worauf bei deren Benutzung zu achten ist, werden im Folgenden näher erläutert.

## Helium

Um die Probe ausreichend zu kühlen, verwendet man flüssiges Helium. Befindet sich die Probe direkt in Helium, so hat sie eine Temperatur von  $\approx -269$  °C. Der Umgang mit einer tiefkalten Flüssigkeit wie Helium kann sehr gefährlich werden<sup>5</sup>. Gekühlte Gegenstände (z. B. der Probenstab) können durchaus so tiefe Temperaturen erreichen, dass Luft an ihnen kondensiert. Deshalb unbedingt Schutzhandschuhe tragen! Auch die enorme Volumenvergrößerung beim Verdampfen sollte man sich bewusst machen: 1 Liter flüssiges Helium bei 4,2 K entspricht 749 Litern gasförmigen Heliums bei 15°C!

<sup>5</sup>Sicherheitshinweise im Anhang beachten!

Während des Versuchs ist daher Vorsicht geboten und Folgendes unbedingt zu beachten:

- Die Kanne muss immer an die Rückführung angeschlossen (Ventil offen!) und das Ventil zum Ballon stets offen sein, damit verdampfendes Helium entweichen kann (Explosionsgefahr).
- Die Kanne beim Einbau nur kurz öffnen, um ein Eindringen von Luft bzw. Wasser zu verhindern und die Abdampfverluste zu reduzieren.
- Das Abkühlen muss langsam erfolgen, da sonst in kurzer Zeit sehr viel Helium verdampft.

### Magnetfeld

Zur Erzeugung eines relativ hohen Magnetfeldes wird eine supraleitende Spule aus Niob-Titan-Filamentdraht mit ca. 10000 Windungen verwendet. Mit dieser Spule erreicht man Magnetfelder bis etwa 5 T.

Übersteigt der Spulenstrom einen kritischen Wert von ca. 50 A oder wird die Spule nicht mehr ausreichend gekühlt<sup>6</sup>, so wird sie normalleitend und gibt einen großen Teil ihrer Energie in Form von Wärme an das Helium ab, welches sofort verdampft - die Spule quencht. Ein schnelles Verdampfen aber führt zu einem plötzlichen Druckanstieg!

### Messelektronik

Das Prinzip einer Magnetotransportmessung ist es, einen konstanten Strom durch die Probe zu schicken, der dadurch erreicht wird, dass man einen im Vergleich zum Probenwiderstand großen Vorwiderstand  $R$  (siehe Abbildung 22) in die Schaltung einbaut. Die an den Potentialsonden abgegriffenen Spannungen sind deshalb direkt proportional zu den entsprechenden Widerständen.

Da zudem der Strom durch die Probe möglichst klein sein sollte ( $\mu\text{A}$ -Bereich, sonst erwärmt sich die Probe zu stark), sind auch die zu messenden Spannungen sehr niedrig ( $\mu\text{V}$ -Bereich). Deshalb werden zwei Lock-In-Verstärker<sup>7</sup> verwendet, um externe Störungen herauszufiltern. Bei einem Lock-In-Verstärker handelt es sich um einen extrem schmalbandigen Verstärker, der aus dem gesamten Spektrum nur das Wechselspannungssignal der Frequenz verstärkt, die ihm als Referenzwechselspannung eingespeist wird. Da die zu messende Längs- oder Hallspannung exakt dieselbe Frequenz wie die Referenzspannung hat, wird nur diese verstärkt und Rauschanteile werden unterdrückt. Die Übereinstimmung der Referenzfrequenz mit der Längs- bzw. Hallspannungsfrequenz ist gewährleistet, da die Referenzspannung über den Vorwiderstand  $R$  auch als Wechselstromquelle für die Probe verwendet wird. Bei diesem Versuchsaufbau werden zwei analoge Lock-In-Verstärker verwendet, deren Ausgangssignale über Digitalmultimeter (DMM) in den Computer eingelesen werden.

Einige grundsätzliche Bemerkungen zu den Messungen:

---

<sup>6</sup>Der Heliumstand in der Kanne sollte noch mindestens 20 cm betragen, das entspricht  $\approx 30$  l flüssigen Heliums.

<sup>7</sup>Eine ausführliche Beschreibung finden Sie z.B. in [28]

- Der Vorwiderstand  $R$  muss so groß gewählt werden, dass der Strom durch die Probe trotz des magnetfeldabhängigen Probenwiderstandes als konstant angenommen werden kann. Da die verwendeten Proben einen Widerstand in der Größenordnung von  $k\Omega$  haben, ist z. B. ein Vorwiderstand von  $10\text{ M}\Omega$  für Hallgeometrien bzw.  $1\text{ M}\Omega$  für van der Pauw-Geometrien geeignet.
- Lock-In-Einstellungen:
  - Oszillatorfrequenz z. B.  $F_{osc} = 81\text{ Hz}$ , also weit entfernt von der Netzfrequenz ( $50\text{ Hz}$ ) und deren Vielfachen.
  - Oszillatoramplitude  $LV$   $L_{osc} \approx 1\text{ V}$ , so dass der Strom durch die Probe bei einem Vorwiderstand von  $10\text{ M}\Omega$   $100\text{ nA}$  beträgt.
  - Eingangsfiler: Tiefpass (LP) mit automatischer Wahl der Grenzfrequenz (TRACK:  $F_{grenz} = F_{osc}$ ).
  - Zeitkonstante: abhängig vom Zeitschritt  $t_m$  der Messwertaufnahme (bei  $t_m = 1\text{ s}$  z. B.  $t_{const} = 1\text{ s}$ ).
  - $LI_1$  wird intern gesteuert (INT)  
 $LI_2$  erhält das Referenzsignal von  $LI_1$ .

## 4. Bedienung des Kannensystems

Der Ein- und Ausbau des Magnetsystems bzw. des Probenstabs sollten aus Sicherheitsgründen nur in Anwesenheit des Betreuers geschehen.

### 4.1. Einbau des Magnetsystems

Um die Messungen durchführen zu können, muss zunächst das Magnetsystem (ohne Probenstab) in die Heliumkanne eingebaut werden.

- Dazu sollten Sie sich zunächst vergewissern, dass die Quetschverschraubung am **unteren** Ende des Magnetsystems befestigt ist.
- Achten Sie auch darauf, dass die **Kanne über Wellschläuche an die Rückführung angeschlossen** und das entsprechende Ventil geöffnet ist.
- Dann kann der größere Flansch der Heliumkanne geöffnet und der Aufsatz der Kanne entfernt werden, wobei der **Dichtring** auf der Kanne bleiben muss. Dieser wird nun durch das Magnetsystem ersetzt, und die Kanne anschließend sofort wieder verschlossen.

Es sollte darauf geachtet werden, dass die Kanne insgesamt nur so kurz wie möglich geöffnet ist, damit möglichst wenig Helium verdampft und keine Luft eindringen kann.

- Jetzt kann das Magnetsystem durch vorsichtiges Lockern der Quetschverschraubung und der Feststellklemme langsam tiefer in die Kanne eingeführt werden, darf dabei aber nicht losgelassen werden. Um die Abdampftrate zu kontrollieren, sollten Sie den Ballon an der Kanne beobachten und das System nur so langsam einführen, dass der Ballon sich nicht merklich vergrößert.
- Noch während Sie das Magnetsystem einführen, sollten Sie so bald wie möglich den zweiten Wellenschlauch an der Rückführung oben am Magnetsystem befestigen und die entsprechenden Hähne öffnen.
- Schließlich muss die Stromversorgung der Spule angeschlossen werden. Befestigen Sie dazu die Netzteilkabel am T-Stück des Magnetsystems (Erdungskabel nicht vergessen!).

Es ist auf **langsames und vorsichtiges Einführen** des Magnetsystems und später auch des Probenstabs zu achten, da sie sich dabei auf die Temperatur des flüssigen Heliums abkühlen. Geschieht dieser Abkühlvorgang zu plötzlich, so verdampft in kurzer Zeit sehr viel Helium, was, wie beim Quenchen der Spule, zu einem raschen Druckanstieg führt. Um dies zu vermeiden, sollten Sie für den Einbau des Magnetsystems 10 - 15 min und für den Probenstab etwa 5 min Zeit einplanen.

Das abgekühlte Magnetsystem bleibt während des ganzen Versuchs in der Kanne (und die Ventile zu den Rückführungsleitungen bleiben **offen!**).

## 4.2. Einbau des Probenstabs und Probenwechsel

### Einbau des Probenstabs

Die verschiedenen Proben können mit dem separaten Probenstab schnell und einfach gewechselt werden. Dabei verfährt man ähnlich wie beim Einbau des Magnetsystems.

- Achten Sie darauf, dass sich die Quetschverschraubung am **unteren** Ende des Probenstabs befindet.
- Öffnen Sie den vorgesehenen Flansch am oberen Ende des Magnetsystems, entfernen Sie den Blindflansch (aber nicht den Dichtring), setzen Sie den Probenstab auf und verschließen Sie den Flansch wieder.
- Der Probenstab kann nun langsam nach unten geschoben werden und kühlt dabei ab.

### Probenwechsel

Beim Probenwechsel müssen Sie nur den Probenstab wieder aus der Kanne holen.

- Ziehen Sie, nachdem die Quetschverschraubung gelockert wurde, den Stab so weit wie möglich nach oben, wobei Sie unbedingt **Handschuhe** tragen müssen. Friert er fest, so warten Sie, bis Sie den Probenstab wieder ein Stück herausziehen können. Achten Sie darauf, dass der Probenstab nicht wieder nach unten rutscht.

- Öffnen Sie den Flansch, holen Sie den Stab heraus und verschließen Sie die Öffnung umgehend mit einem Blindflansch.
- Tauschen Sie die Probe aus, und **führen Sie die neue Probe erst ein, wenn der Probenstab wieder trocken ist**, damit kein Wasser in die Kanne gelangen kann.

### 4.3. Ausbau des Magnetsystems

Nach dem Messen muss das Magnetsystem wieder ausgebaut und die Kanne mit dem Originalaufsatz verschlossen werden. Dabei kommen Sie mit sehr kalten Gegenständen in Kontakt und müssen unbedingt **Schutzhandschuhe** tragen!

- Ist der Probenstab bereits ausgebaut und das Netzkabel entfernt, so wird das Magnetsystem langsam aus der Kanne gezogen. Das System ist sehr kalt, und kann deshalb festfrieren. Geschieht dies, dann sollten Sie die Quetschverschraubung bis zum Anschlag festdrehen und das System noch zusätzlich mit der Feststellklemme sichern. **Das Magnetsystem darf beim Auftauen auf keinen Fall wieder in die Kanne rutschen!** Nach kurzem Warten lässt es sich wieder bewegen. Der Aufwärmvorgang kann durch das Benutzen eines Heißluftföns ( $T_{max} = 100^{\circ}\text{C}$ ) beschleunigt werden.
- Befindet sich die Spule direkt unter dem Flansch der Kanne, sollte das System trockengeblasen werden, damit beim Ausbau kein Wasser in die Kanne eindringt.
- Jetzt können Sie den Flansch öffnen, das Magnetsystem durch den Originalverschluss ersetzen und den Flansch wieder verschließen.

## 5. Probenherstellung

Im Praktikum werden Sie zwei verschiedene Halbleiterproben untersuchen, so dass sie sich von der Geometrieunabhängigkeit des Quanten-Hall-Effekts überzeugen können. Die mit einer Hallbar strukturierte Probe ist bereits fertig prozessiert, während Sie die wesentlich einfachere Herstellung der van der Pauw Geometrie selbst übernehmen sollen.

### 5.1. Hallbar

Die im Praktikum zu untersuchenden Hallgeometrien werden in einem komplizierten, zeitaufwendigen Verfahren im Reinraum hergestellt. Im Folgenden wird, zum besseren Verständnis, ein kurzer Überblick über die wichtigsten Schritte der Probenherstellung gegeben.

Das Ausgangsmaterial ist eine GaAs/AlGaAs-Heterostruktur, bei der die einzelnen Schichten mittels Molekularstrahlepitaxie gewachsen wurden.

### 1. Probenvorbereitung

Mit Hilfe eines Diamantritzers wird aus dem Ausgangsmaterial, das in Form eines 2-Zoll-Wafers vorliegt, ein Rechteck mit einer Kantenlänge von ca. 5 mm bzw. 6 mm herausgebrochen und mit Aceton gereinigt.

### 2. Photolithographie und Mesaätzen

Das Halbleiterstück wird mit einem UV-empfindlichen Photolack überzogen und in einem Maskenbelichter belichtet, d. h. die auf der Maske befindliche Struktur wird auf den Lack übertragen. Die sogenannte Photolithographie eignet sich für die Herstellung von Strukturen bis hinab in den  $\mu\text{m}$ -Bereich. Die belichtete Probe wird dann in einer NaOH-haltigen Lösung entwickelt, so dass beim anschließenden nasschemischen Ätzen (Essigsäure) nur die von der Photolackschicht geschützte Struktur - die Mesa - stehen bleibt. Im restlichen Bereich wird das 2DEG durch genügend tiefes Ätzen entfernt (vgl. Abbildung 23).

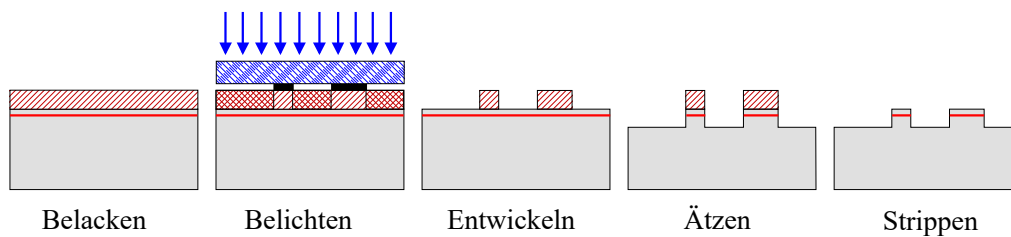


Abbildung 22: Schematische Darstellung der einzelnen Prozessschritte bei der Mesadeffinition (aus [19]).

### 3. Kontaktierung

Nach einer erneuten Reinigung der Probe wird wieder Photolack aufgeschleudert und nochmals belichtet. Die diesmal verwendete Maske öffnet nur Kontaktfenster (vgl. Abbildung 24).

In einer Hochvakuumanlage werden Gold/Germanium und Nickel aufgedampft. Die Metalle lagern sich in den geöffneten Kontaktpads, aber auch auf der Photolackschicht ab. Entfernt man diese im sogenannten Lift-off mit Aceton, so lösen sich die darauf befindlichen Metallschichten mit ab. Nur auf den Kontaktpads bleibt das auf dem Substrat aufgedampfte Metall zurück. Um ohmschen Kontakt zum 2DEG zu erhalten werden die Kontakte einlegiert, d. h. die Probe wird unter Formiergasatmosphäre auf ca.  $450^\circ\text{C}$  erhitzt, so dass das Metall aufschmilzt und in den Halbleiter eindiffundiert.

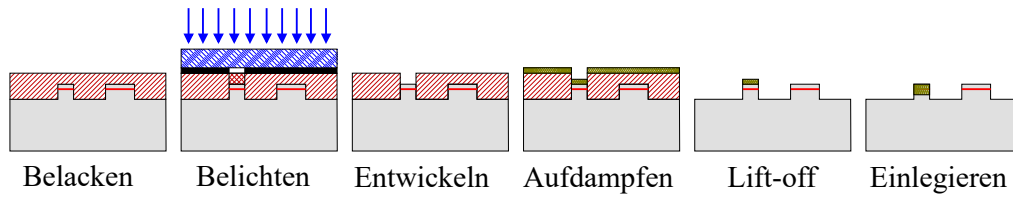


Abbildung 23: Schematische Darstellung der einzelnen Prozessschritte bei der Kontaktierung des 2DEGs (aus [19]).

In einem weiteren Lithographieschritt (mit gleicher Maske) wird noch Gold aufgedampft. Diese Goldschicht auf den Kontaktpads ist für das Bonden nötig.

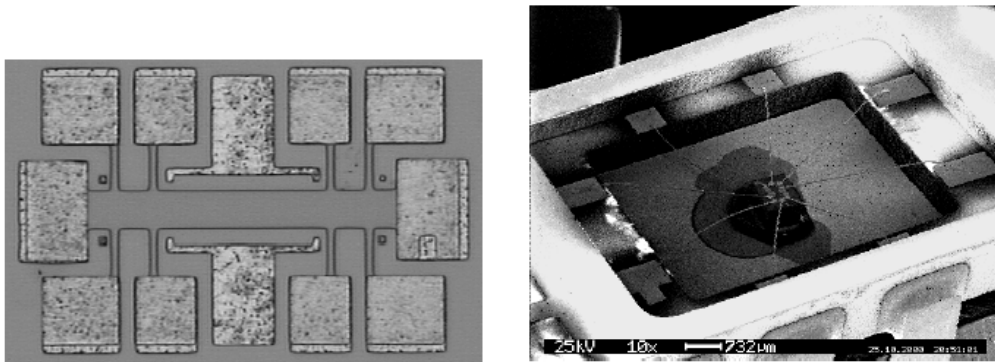


Abbildung 24: Links die fertig produzierte Hallbar, die anschließend in einen Chipcarrier geklebt und gebondet wird (rechts).

#### 4. Fertigstellung und Bonden

Schließlich wird das Probenstück zerteilt, und jede einzelne Hallbar in einen separaten Chipcarrier geklebt. Die Verbindung von den Kontaktpads der Probe zu den Kontakten des Chipcarriers erhält man durch das Bonden. Dabei wird ein dünner Golddraht (Durchmesser ca.  $25 \mu\text{m}$ ) auf die Kontakte gedrückt und mit einem kurzen Ultraschallstoß festgeschweißt.

## 5.2. Van der Pauw-Geometrie

Wesentlich einfacher als die Hall-Struktur ist die van der Pauw-Geometrie, die Sie mit Hilfe der folgenden Anweisungen selbst herstellen können. Beachten Sie dabei die Sicherheitshinweise im Anhang! Dabei muss ein quadratisches Halbleiterstück (Heterostruktur mit 2DEG) kontaktiert und in einen Chipcarrier eingeklebt werden. Abbildung 26 zeigt eine fertige van der Pauw-Probe.



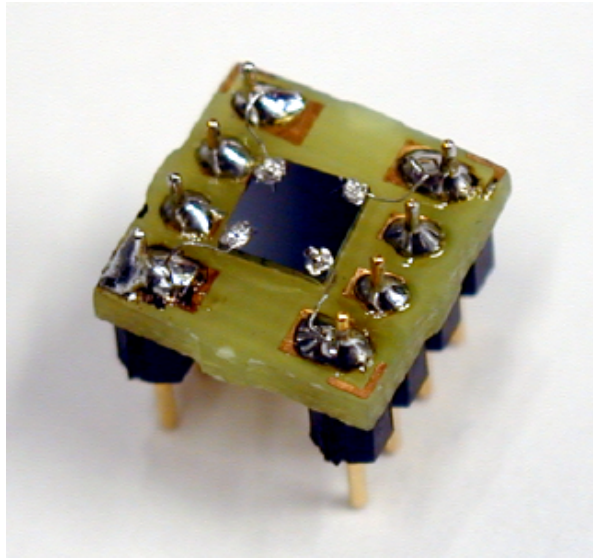


Abbildung 25: Fertige Van der Pauw-Probe

1. Kontaktieren des Halbleiterstücks

Mit Indium werden die vier eingeritzten Ecken des Halbleiterstücks kontaktiert. Dazu wird mit einer 450°C heißen Lötspitze eine dünne Indiumschicht auf die Ritze aufgetragen. Daraufhin werden die Kontakte im Reinraum vom Betreuer einlegiert, so dass diese ohmsches Verhalten zeigen.

2. Vorbereiten des Chipcarriers

In einen passenden Stecksockel werden zwei vierpolige Kontaktleisten gesteckt, um diese zu fixieren. Anschließend wird eine Platine bei 350°C an den Leisten festgelötet. An den vier Ecken wird dann ein dünner, verzinnter, etwa 2 cm langer Draht eingelötet, der später zum Kontaktieren des Halbleiterstücks dient.

3. Fertigstellung

Das Halbleiterstück wird nun mit „PMMA zum Kleben“ in den vorbereiteten Chipcarrier geklebt. Bei 200°C wird das Indium an den Ecken nochmals aufgeschmolzen und die Kontaktdrähte werden damit festgelötet. Um dies zu erleichtern, sollten die Drähte zuvor in die richtige Form gebogen werden.

## 6. Messungen

### 6.1. Hallbar

Es wird eine mit einer Hallbar strukturierte Probe eingebaut und nach den folgenden Anweisungen vermessen. Beim Einbau darf die Leuchtdiode nicht vergessen werden.

1. Unbeleuchtete Messung

Ziel ist es, die Hallspannung und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen mit Hilfe

einer Messung aufzunehmen.

Bemerkungen:

- An welchen Kontaktpunkten muss abgegriffen werden (Belegung beim Betreuer erfragen), um die Hallgerade (Messbereich 3 mV) bzw. die Shubnikov-de Haas Oszillationen (Messbereich 300  $\mu\text{V}$ ) zu erhalten?
  - Um Inhomogenitäten der Probe herauszumitteln ist es sinnvoll sowohl bei positiven als auch bei negativen Magnetfeldern zu messen und dann zu mitteln.
  - Außerdem sollte die Sweeprate zwischen 0,008 T/s und 0,005 T/s gewählt werden, um eine sinnvolle Messung in möglichst geringer Zeit zu erhalten.
2. Beleuchtete Messung Beleuchten Sie nun die Probe mittels der eingebauten LED kurz (etwa 1 s) und wiederholen Sie anschließend die oben durchgeführte Messung, bei sonst gleichen Bedingungen.

## 6.2. Van der Pauw-Geometrie

Im zweiten Versuchsteil wird die von Ihnen hergestellte van der Pauw-Geometrie (vgl. Abschnitt 5.2) untersucht und die Messergebnisse mit denen der zuvor untersuchten Probe verglichen. Dazu werden ebenfalls Hall- und Längsspannung aufgenommen. Die van der Pauw-Probe wird mit einer Leuchtdiode in den Probenstab eingebaut und abgekühlt.

Überlegungen und Bemerkungen:

- Ist es sinnvoller, die Messung im beleuchteten oder im unbeleuchteten Zustand durchzuführen?
- Der Vorwiderstand muss bei dieser Probe nicht so groß gewählt werden (1 M $\Omega$ ).
- An welchen Kontakten kann die Längsspannung abgegriffen werden? Wie misst man die Hall-Spannung? Können die SdHs gleichzeitig mit der Hallgeraden aufgenommen werden?
- Der Messbereich der Hallspannung muss bei der van der Pauw-Probe auf 10 mV erhöht werden.
- Auch hier sollte der negative und positive Magnetfeldbereich gemessen werden.

Um bei der van der Pauw-Geometrie den für die Bestimmung der Beweglichkeit  $\mu$  notwendigen Schichtwiderstand  $R_{\square}$  ermitteln zu können, muss  $R_{ABCD}$  und mindestens einer der entsprechenden Widerstände mit zyklischer Vertauschung der Abgriffpunkte gemessen werden. In der Praxis ist es sinnvoll, bei  $B = 0$  alle vier Widerstände  $R_{ABCD}$ ,  $R_{BCDA}$ ,  $R_{CDAB}$   $R_{DABC}$  zu messen, und daraus den Schichtwiderstand  $R_{\square}$  zu berechnen. Die einzelnen Messungen dazu sollten in einem kleinen Bereich um  $B = 0$  (–0,5 bis 0,5 T) durchgeführt werden.

## 7. Auswertung

### 7.1. Hallbar

Werten Sie die experimentellen Daten mit Hilfe von „Origin“ anhand von  $B$ - $\rho_{xx}$ -bzw.  $B$ - $\rho_{xy}$ -Diagrammen aus. Beachten Sie dabei, dass die gemessenen Werte in Abhängigkeit vom Magnetfeld nicht Widerstände, sondern Spannungen sind.

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Plateaus der Hallgeraden und den Shubnikov-de Haas-Oszillationen?
2. Ordnen Sie den Hallplateaus die entsprechenden Füllfaktoren  $\nu$  zu. Vergleichen Sie die Widerstandswerte der Plateaus mit den theoretisch erwarteten Werten. Ermitteln Sie aus den experimentellen Daten die Konstante  $C$  der Hallplateaus  $R_H = C \cdot \frac{1}{i}$  und vergleichen Sie diese mit der Klitzing-Konstante  $R_K = \frac{h}{e^2}$ . Wie kann man die Abweichung erklären?
3. Diskutieren Sie den Einfluss des Elektronenspins. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl  $i$  der besetzten Landauniveaus und dem Füllfaktor  $\nu$  und ordnen Sie den Hallplateaus den entsprechenden Index  $i$  zu.
4. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichte  $n_s$  auf zwei verschiedene Arten. Berechnen Sie die Beweglichkeit  $\mu$  und die mittlere freie Weglänge  $l$ .
5. Vergleichen Sie die Ergebnisse der Messungen vor und nach der Beleuchtung. Beschreiben und diskutieren Sie die Unterschiede.

### 7.2. Van der Pauw-Geometrie

1. Ordnen Sie den Hallplateaus die entsprechenden Füllfaktoren  $\nu$  zu. Was lässt sich über die Abhängigkeit der Widerstandswerte von der Geometrie der Probe aussagen?
2. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichte  $n_s$  auf zwei verschiedene Arten. Bestimmen Sie den Schichtwiderstand  $R_{\square}$  und berechnen Sie die Beweglichkeit  $\mu$  und die mittlere freie Weglänge  $l$ .  
Vergleichen Sie die Werte mit denen aus der Hallbar-Messung, falls für die Herstellung der van der Pauw-Geometrie und der Hallbar die gleiche Halbleiterheterostruktur verwendet wurde (beim Betreuer erfragen). Was lässt sich über die Genauigkeit der van der Pauw-Methode aussagen?

## 8. Ausblick

Im Rahmen dieses Praktikums wurde der Integrale Quanten-Hall-Effekt behandelt, bei dem die Plateaus in der Hallgeraden nur bei ganzzahligen Füllfaktoren auftreten. Wenige

Jahre nach der Entdeckung des Integralen Quanten-Hall-Effekts durch Klaus von Klitzing allerdings fanden Tsui, Störmer und Gossard [17] in hochreinen Heterostrukturen bei sehr tiefen Temperaturen ein zusätzliches Plateau in der Hallspannung bei Füllfaktor  $\nu = \frac{1}{3}$ . Kurz nach der experimentellen Entdeckung konnte dies mit einer relativ einfachen Theorie erklärt werden, die die Coulombwechselwirkung zwischen den Elektronen berücksichtigt.

In der Folgezeit wurden zunehmend Plateaus bei gebrochenzahligen Füllfaktoren beobachtet. Dieser Gebrochenzahlige oder Fraktionale Quanten-Hall-Effekt zeichnet sich dadurch aus, dass zusätzlich zu den Plateaus bei ganzzahligen Füllfaktoren auch Plateaus bei gebrochenzahligen Füllfaktoren auftreten, für die gilt:

$$\nu = \frac{p}{q}$$

wobei  $p$  und  $q$  ganzzahlig und  $q$  außerdem ungerade ist. Der Füllfaktor  $\nu$  gibt auch hier die (im Allgemeinen nicht ganzzahlige) Anzahl der Landausubniveaus an, die mit Elektronen besetzt sind.

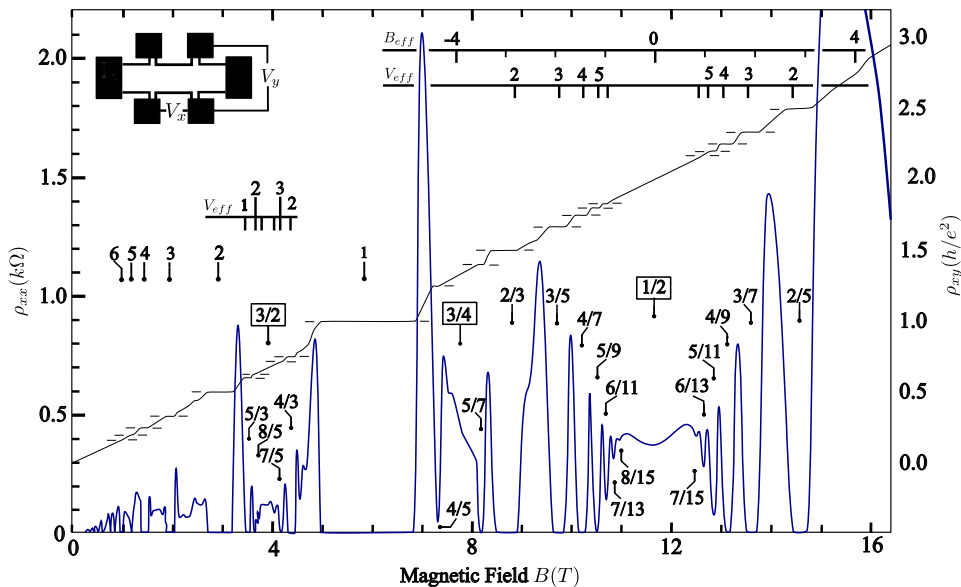


Abbildung 26: Der Gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt (aus [9]). Zu erkennen sind die Serien um die Füllfaktoren  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{2}$ .

Im Laufe der Jahre konnten Heterostrukturen mit immer höheren Beweglichkeiten hergestellt werden, und in demselben Maße wurden immer mehr gebrochenzahlige Füllfaktoren aufgelöst. Besonders ausgeprägt sind die Effekte bei Füllfaktoren, für die gilt:

$$\nu = \frac{p}{2p+1} \quad \text{und} \quad \nu = 1 - \frac{p}{2p+1}$$

Diese gruppieren sich symmetrisch um  $\nu = \frac{1}{2}$ . Auch um andere Füllfaktoren mit geradzahligem Nenner, z. B.  $\nu = \frac{3}{2}$  oder  $\nu = \frac{1}{4}$ , lassen sich solche Serien beobachten.

Diese zunehmende Anzahl gebrochenzahliger Plateaus erforderte schließlich eine recht komplizierte Erklärungstheorie.

Im Jahre 1989 wurde der Gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt von Jain [18] als Quanten-Hall-Effekt von Composite Fermions interpretiert. Diese Verbundfermionen sind Teilchen, die aus einem Elektron und einer geradzahligem Anzahl von angehängten magnetischen Flussquanten bestehen. Sie tragen, wie Elektronen, ganzzahlige Ladung, das Anhängen der Flussquanten bewirkt allerdings ein homogenes Magnetfeld, das in Gegenrichtung zum äußeren Feld wirkt. Demnach spüren die Composite Fermions ein reduziertes effektives Magnetfeld, das z. B. für ein Elektron mit zwei angehängten Flussquanten bei Füllfaktor  $\frac{1}{2}$  gleich Null ist. Damit wird der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt auf eine sehr intuitive Weise auf den Integralen Quanten-Hall-Effekt zurückgeführt. Diese Theorie, für die R. B. Laughlin, H. L. Störmer und D. C. Tsui 1998 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurden, wird als Erklärungsmodell für viele aktuelle Forschungsergebnisse verwendet.

## 9. Literatur

### Literatur:

- 1 S. Datta: *Electronic transport in mesoscopic systems*, Cambridge University Press (1995).  
84UP 3150 D234
- 2 J. H. Davies: *The physics of low-dimensional semiconductors: An introduction*, Cambridge University Press (1998).  
84UP 3150 D256
- 3 H. Ibach, H. Lüth: *Festkörperphysik: Einführung in die Grundlagen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 4.Auflage (1995).  
84UP 1000 I12
- 4 C. Kittel: *Einführung in die Festkörperphysik*, 8. Auflage R. Oldenbourg, München, Wien (1999).  
84UP 1000 K62
- 5 K. Kopitzki: *Einführung in die Festkörperphysik*, Teubner, Stuttgart (1993).  
84UP 1000 K83
- 6 W. Raith (Hrsg): *Bergmann/Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 6 Festkörper*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1992).  
84UC 143 B499
- 7 M. J. Kelly: *Low-dimensional semiconductors: materials, physics, technology, devices*, Oxford University Press (1995).
- 8 P. Blood, J. W. Orton: *The Electrical Characterization of Semiconductors: Majority Carriers and Electron States*, Philips Research Laboratories, Redhill, Surrey RH1 5HA, UK, Academic Press Limited (1992).
- 9 J. H. Smet: *Ballistic Transport of Composite Fermions in Semiconductor Nanostructures, in Composite Fermions: a unified view of the Quantum Hall Regime*, O. Heinonen, World Scientific (1998).

### Veröffentlichungen:

- 10 P. Drude: *Zur Elektronentheorie I*, Annalen der Physik **1**, 566 (1900).
- 11 P. Drude: *Zur Elektronentheorie II*, Annalen der Physik **3**, 369 (1900).
- 12 K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper: *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**(6), 494-97 (1980).

- 13 M. Büttiker: *Absence of backscattering in the quantum hall effect in multiprobe conductors*, Phys. Rev. Lett. **38**(14), (1988).
- 14 D. J. Chadi, K. J. Chang: *Theory of the Atomic and Electronic Structure of DX Centers in GaAs and  $Al_xGa_{1-x}As$  Alloys*, Phys. Rev. Lett. **61**(7), 873-6 (1988).
- 15 P. M. Mooney, T. N. Theis: *The DX Center: A New Picture of Substitutional Donors in Compound Semiconductors*, Comments Cond. Mat. Phys.**16**(3), 167-90, (1992).
- 16 L. J. van der Pauw: *A Method of Measuring Specific Resistivity and Hall Effect of Discs of Arbitrary Shape*, Philips Res. Rep.13,1 (1958).
- 17 D. C. Tsui, H. L. Störmer, A. C. Gossard: *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **48**(22), 1559-62 (1982).
- 18 J. K. Jain: *Composite Fermions Approach for the Fractional Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **63**(2), 199-202 (1989).

**Diplomarbeiten, Doktorarbeiten, Habilitationsschriften:**

- 19 H.-D. Schuh: *Mikro-Hall-Magnetometrie*, Doktorarbeit, Universität Regensburg (2000).
- 20 J. Eroms: *Kommensurabilitätseffekte in InAs-Heterostrukturen*, Diplomarbeit, Universität Regensburg (1998).
- 21 K. D. Weiss: *Kommensurabilitätseffekte in lateralen Übergittern*, Habilitationsschrift, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart (1992).
- 22 C. Mitzkus: *Transportuntersuchungen an dichtemodulierten niederdimensionalen Elektronensystemen*, Diplomarbeit, Universität Regensburg (2000).
- 23 H. Stanzl: *Messung der elektronischen Transporteigenschaften an dotierten ZnTe-Epitaxie-Schichten im Temperaturbereich von 10 K bis 300 K*, Diplomarbeit Universität Regensburg (1990).
- 24 S. Jobst: *Composite Fermions in lateralen Übergittern*, Doktorarbeit, Universität Regensburg (2000).

**Sonstiges:**

- 25 F. Kohlrausch: *Praktische Physik*, B. G. Teubner Stuttgart, 24. Auflage (1996).
- 26 Ludwig-Maximilian-Universität München: *Quantisierter Halleffekt, Aufbau eines F-Praktikumsversuches*, FII-Laborpraktikum (1990).
- 27 E. Braun, B. Schumacher, P. Warnecke: *Überblick über den Stand der Präzisionsmessungen des Quanten-Hall-Effekts*, <http://www.ptb.de/deutsch/org/2/21/qhe-uebl.html>
- 28 J. Niebuhr, G. Lindner: *Physikalische Messtechnik mit Sensoren*, R. Oldenbourg Verlag GmbH, München (1996).

## **A. Anhang A: Ein einführender Artikel zum QHE**

Eine Kopie des unten aufgeführten Artikels sollte Ihrer Praktikumsanleitung beigelegt sein.

Klaus von Klitzing: *Der Quanten-Hall-Effekt*  
Spektrum der Wissenschaft, März 1986.



## B. Anhang B: Sicherheitshinweise

Neben den Praktikumsrichtlinien und der Laborordnung der Naturwissenschaftlichen Fakultät II Physik ist besonders auf Folgendes zu achten:

Umgang mit tiefkalten Flüssigkeiten:

- Augen, Gesicht und Haut vor Flüssigkeitsspritzern schützen, da tiefkalte Flüssigkeiten bei Kontakt verbrennungsähnliche Frostschäden verursachen (Schutzkleidung)!
- Nur in gut gelüfteten Räumen arbeiten, da der Sauerstoffgehalt der Luft durch verdampfendes Helium herabgesetzt sein kann (Erstickengefahr)!
- Kein Feuer in der Nähe von tiefkalten Flüssigkeiten, da Luftsauerstoff auf kalten Oberflächen auskondensiert (Brand- und Explosionsgefahr)!

Umgang mit hohen Magnetfeldern:

- Keine losen ferromagnetischen Gegenstände im Umkreis des Magneten, da diese angezogen werden können.
- Die Funktion von Herzschrittmachern kann im Bereich hoher Magnetfelder beeinträchtigt werden.
- Magnetfeldempfindliche Wertgegenstände (z. B. Kreditkarten) sollten in ausreichendem Abstand aufbewahrt werden.

Umgang mit Galliumarsenid:

Galliumarsenid bildet mit Feuchtigkeit in Gegenwart von Luftsauerstoff an der Oberfläche eine dünne, in Wasser lösliche, giftige Arsenoxidschicht. Vor allem bei der Herstellung der van der Pauw-Geometrie ist deshalb zu beachten:

- Nur in gut gelüfteten Räumen arbeiten, da die toxische Wirkung vor allem auf das Einatmen freigesetzten Arsentrioxids und entstehenden Arsenwasserstoffs zurückzuführen ist.
- Bei der Herstellung der van der Pauw-Geometrie immer Schutzhandschuhe tragen, um Hautkontakt zu vermeiden.
- Bei Berührung mit der Haut sofort mit viel Wasser nachspülen.

Umgang mit Chlorbenzol:

PMMA-Lack, der für das Einkleben der van der Pauw-Geometrie verwendet wird, besteht aus in Chlorbenzol gelöstem Plexiglas. Deshalb:

- Nur in gut gelüfteten Räumen arbeiten und die Dämpfe nicht direkt einatmen.
- Berührung mit Augen und Haut vermeiden und gegebenenfalls sofort mit viel Wasser spülen.